



TESIS - SM 142501

**ANALISIS SISTEM DINAMIK DAN KONTROL  
OPTIMAL PADA MODEL EPIDEMI TIPE *SEIT*  
DENGAN PERBEDAAN PERIODE *EXPOSED*  
DAN TINGKAT KEJADIAN TERSATURASI**

M. IVAN ARIFUL FATHONI  
NRP. 1213 2010 09

DOSEN PEMBIMBING  
Dr. Mardlijah, M.T.  
Dr. Hariyanto, M.Si.

PROGRAM MAGISTER  
JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER  
SURABAYA  
2015



THESIS - SM 142501

# **DYNAMICAL SYSTEM ANALYSIS AND OPTIMAL CONTROL OF SEIT EPIDEMIC MODEL WITH DIVERSITY OF EXPOSED PERIOD AND SATURATED INCIDENCE RATE**

M. IVAN ARIFUL FATHONI  
NRP. 1213 2010 09

SUPERVISOR  
Dr. Mardlijah, M.T.  
Dr. Hariyanto, M.Si.

MASTER'S DEGREE  
MATHEMATICS DEPARTMENT  
FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES  
SEPULUH NOPEMBER INSTITUTE OF TECHNOLOGY  
SURABAYA  
2015

**ANALISIS SISTEM DINAMIK DAN KONTROL OPTIMAL PADA  
MODEL EPIDEMI TIPE SEIT DENGAN PERBEDAAN PERIODE  
EXPOSED DAN TINGKAT KEJADIAN TERSATURASI**

Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar  
Magister Sains (M.Si.)

di

Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :

**M. IVAN ARIFUL FATHONI**

**NRP. 1213 201 009**

Tanggal Ujian : 13 Januari 2015

Periode Wisuda : September 2015

Disetujui oleh :

**Dr. Mardlijah, M.T.**

**NIP. 19670114 199102 2 001**

(Pembimbing I)

**Dr. Hariyanto, M.Si.**

**NIP. 19530414 198203 1 002**

(Pembimbing II)

**Dr. Subiono, M.S.**

**NIP. 19570411 198403 1 001**

(Penguji)

**Prof. Dr. M. Isa Irawan, M.T.**

**NIP. 19631225 198903 1 001**

(Penguji)

**Subchan, M.Sc., Ph.D.**

**NIP. 19710513 199702 1 001**

(Penguji)



**Direktur Program Pascasarjana**

**Prof. Dr. Ir. Adi Soeprijanto, M.T.**

**NIP. 19640405 199002 1 001**



# ANALISIS SISTEM DINAMIK DAN KONTROL OPTIMAL PADA MODEL EPIDEMI TIPE *SEIT* DENGAN PERBEDAAN PERIODE *EXPOSED* DAN TINGKAT KEJADIAN TERSATURASI

Nama Mahasiswa : M. Ivan Ariful Fathoni  
NRP : 1213 2010 09  
Pembimbing : 1. Dr. Mardijah, M.T.  
2. Dr. Hariyanto, M.Si.

## ABSTRAK

Penyebaran penyakit menular antarmanusia adalah salah satu fenomena yang dapat dimodelkan. Pada penelitian ini dibahas tentang analisis sistem dinamik dan kontrol optimal pada model epidemi tipe *SEIT* (*Susceptible Exposed Infective Treatment*). Adanya variasi virus dan kondisi jasmani yang berbeda tiap individu serta adanya perubahan perilaku dari individu *susceptible* menjadi alasan pembentukan model epidemi dengan perbedaan periode *exposed* dan tingkat kejadian tersaturasi. Model diberikan kontrol optimal pengobatan dengan tujuan untuk meminimalkan jumlah individu *infective* dan biaya pengobatan. Model dikonstruksi berdasarkan tiga kasus, yaitu model I adalah model tanpa pengobatan, model II adalah model dengan pengobatan pada populasi *infective*, dan model III adalah model dengan pengobatan pada populasi *exposed*. Ketiga model memiliki dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit yang selalu eksis dan bersifat stabil saat bilangan reproduksi dasar bernilai kurang dari satu, dan titik kesetimbangan endemi yang eksis dan bersifat stabil saat bilangan reproduksi dasar bernilai lebih dari satu. Kontrol pengobatan pada model II dan III keduanya eksis, dan dengan menerapkan Prinsip Pontryagin Maksimum diperoleh kontrol dan sistem yang optimal. Solusi dari sistem optimal yang diperoleh terbukti tunggal untuk interval waktu yang kecil. Analisis yang telah diperoleh dari ketiga model diilustrasikan dengan simulasi numerik menggunakan program Matlab berdasarkan metode Runge-Kutta Orde Empat dan Sweep Maju-Mundur. Simulasi numerik menampilkan hasil yang sesuai dengan hasil analisis, serta menunjukkan bahwa pemberian kontrol pengobatan pada populasi *infective* lebih efektif daripada pemberian kontrol pengobatan pada populasi *exposed*.

**Kata kunci :** model epidemi *SEIT*, tingkat kejadian tersaturasi, titik kesetimbangan, kestabilan, pengobatan, kontrol optimal, Prinsip Pontryagin.



# **DYNAMICAL SYSTEM ANALYSIS AND OPTIMAL CONTROL OF SEIT EPIDEMIC MODEL WITH DIVERSITY OF EXPOSED PERIOD AND SATURATED INCIDENCE RATE**

Name : M. Ivan Ariful Fathoni  
Student Identity Number : 1213 2010 09  
Supervisor : 1. Dr. Mardlijah, M.T.  
2. Dr. Hariyanto, M.Si.

## **ABSTRACT**

The spread of infectious disease among humans is one of the phenomena that can be modeled. In this research, a dynamical system analysis and optimal control on SEIT (Susceptible Exposed Infective Treatment) epidemic models is discussed. The virus variation, different physical conditions of each individual, and behavioral change of susceptible individuals are the reason to form a model with diversity of exposed period and saturated incidence rate. The treatment optimal control is given in the models, with an aim of the control is minimizing infective individuals number and treatment costs. The Model is constructed into three cases, model I is a model without treatment, model II is a model with treatment in the infective population, and model III is a model with treatment in the exposed population. All of model have two equilibrium points, i.e. disease-free equilibrium point which always exists and stable when the basic reproduction number is less than one, and the endemic equilibrium point which exists and stable when the basic reproduction number is greater than one. Treatment control in model II and III both exist, and by applying Maximum Pontryagin Principle, control and optimality system are obtained. Solution of the optimality system is already proved that unique for a small time interval. The analysis that has been obtained from the three models are illustrated with numerical simulations using Matlab program based on Fourth Order Runge-Kutta dan Forward-Backward Sweep method. Numerical simulations show the results in accordance with the analysis results, and it shows that giving treatment control in the infective population is better than giving treatment control in the exposed population.

**Keywords** : SEIT epidemic models, saturated incidence rate, equilibrium point, stability, treatment, optimal control, Pontryagin Principle.



## KATA PENGANTAR

Puji syukur Alhamdulillah penulis panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan Rahmat, Taufiq, dan Hidayah-Nya, serta junjungan Beliau Rasulullah SAW atas suri teladan yang dibawanya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tesis yang berjudul **“Analisis Sistem Dinamik dan Kontrol Optimal pada Model Epidemi Tipe *SEIT* dengan Perbedaan Periode *Exposed* dan Tingkat Kejadian Tersaturasi”** ini tepat pada waktunya. Tesis ini merupakan sebagian persyaratan kelulusan dalam memperoleh gelar magister di Program Studi Magister Matematika, Fakultas MIPA, Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

Penyusunan Tesis ini tidak lepas dari bimbingan, bantuan, dan dukungan moral maupun spiritual dari banyak pihak. Oleh sebab itu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Ibu, Bapak, beserta keluarga tercinta yang selalu memberikan dukungan, doa, dan motivasi agar penulis dapat menyelesaikan Tesis ini.
2. Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si., selaku Ketua Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
3. Dr. Mardijah, M.T. dan Dr. Hariyanto, M.Si., selaku dosen pembimbing yang telah meluangkan waktu untuk membimbing, memberikan masukan dan mendorong penulis dalam menyelesaikan Tesis ini.
4. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc., selaku dosen wali yang telah memberikan motivasi, arahan, dan bimbingan selama penulis menempuh kuliah.
5. Dr. Subiono, M.Sc., Prof. Dr. M. Isa Irawan, M.T, dan Subchan, M.Sc., Ph.D. selaku dosen penguji yang telah memberikan masukan dan juga motivasi bagi penulis sehingga Tesis ini dapat selesai tepat waktu.
6. Seluruh dosen Matematika yang telah memberikan bekal dan ilmu pengetahuan serta staf administrasi Program Studi Magister Matematika atas segala bantuannya.
7. Nisa Ayunda, Himmatul Mursyidah, dan sahabat penulis lainnya atas semua bantuan, semangat, dan dukungannya selama proses penulisan Tesis ini.



8. Keluarga besar Pascasarjana Matematika ITS 2013, dan semua pihak yang telah membantu proses penulisan Tesis ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu. Terima kasih.

Semoga Allah SWT memberikan anugerah dan karunia-Nya kepada semua pihak yang telah membantu menyelesaikan Tesis ini.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan Tesis ini masih banyak kekurangan, sehingga kritik dan saran dari pembaca sangat penulis harapkan untuk perbaikan kedepannya. Kritik dan saran bisa dikirim melalui email penulis [m.ivan@fathonisme.com](mailto:m.ivan@fathonisme.com). Akhirnya semoga Tesis ini dapat bermanfaat bagi pembaca, khususnya mahasiswa Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

Surabaya, 05 Januari 2015

Penulis



## DAFTAR ISI

<b>LEMBAR PENGESAHAN .....</b>	<b>i</b>
<b>ABSTRAK .....</b>	<b>iii</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>v</b>
<b>KATA PENGANTAR.....</b>	<b>vii</b>
<b>DAFTAR ISI.....</b>	<b>ix</b>
<b>DAFTAR TABEL .....</b>	<b>xi</b>
<b>DAFTAR GAMBAR.....</b>	<b>xiii</b>
<b>DAFTAR LAMPIRAN .....</b>	<b>xv</b>
<b>BAB 1 PENDAHULUAN .....</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	3
1.3 Batasan Masalah.....	4
1.4 Tujuan Penelitian .....	4
1.5 Manfaat Penelitian .....	4
<b>BAB 2 KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI .....</b>	<b>5</b>
2.1 Model Epidemi dengan Kontrol Optimal.....	5
2.2 Tingkat Kejadian Nonlinear .....	6
2.3 Sistem Dinamik.....	7
2.4 Titik Keseimbangan .....	7
2.5 Kestabilan Lokal .....	8
2.6 Kestabilan Global.....	12
2.6.1 Fungsi Lyapunov .....	13
2.6.2 Teorema Poincarè – Dulac .....	13
2.7 Bilangan Reproduksi Dasar .....	14
2.8 Bifurkasi Transkritikal .....	15
2.9 Kontrol Optimal .....	16
2.9.1 Teori Kontrol optimal.....	16
2.9.2 Fungsi Objektif.....	17
2.9.3 Eksistensi Kontrol Optimal .....	17
2.9.4 Ketunggalan Sistem Optimal.....	18
2.9.5 Prinsip Pontryagin Maksimum .....	18
<b>BAB 3 METODE PENELITIAN .....</b>	<b>21</b>



<b>BAB 4 PEMBAHASAN .....</b>	<b>25</b>
4.1 Model I .....	25
4.1.1 Konstruksi Model.....	25
4.1.2 Titik Keseimbangan.....	33
4.1.3 Kestabilan Lokal .....	36
4.1.4 Kestabilan Global.....	40
4.2 Model II .....	44
4.2.1 Konstruksi Model.....	44
4.2.2 Titik Keseimbangan.....	48
4.2.3 Kestabilan Lokal .....	49
4.2.4 Eksistensi Kontrol Optimal.....	49
4.2.5 Penyelesaian Kontrol Optimal .....	55
4.2.6 Ketunggalan Sistem Optimal .....	58
4.3 Model III.....	63
4.3.1 Konstruksi Model.....	63
4.3.2 Titik Keseimbangan.....	67
4.3.3 Kestabilan Lokal .....	68
4.3.4 Eksistensi Kontrol Optimal.....	68
4.3.5 Penyelesaian Kontrol Optimal .....	70
4.3.6 Ketunggalan Sistem Optimal .....	73
4.4 Simulasi Numerik.....	76
4.4.1 Kestabilan Model I.....	76
4.4.2 Kontrol Optimal Model II dan III .....	81
<b>BAB 5 KESIMPULAN DAN SARAN .....</b>	<b>91</b>
5.1 Kesimpulan.....	91
5.2 Saran.....	92
<b>DAFTAR PUSTAKA .....</b>	<b>93</b>
<b>LAMPIRAN .....</b>	<b>97</b>
<b>BIODATA PENULIS .....</b>	<b>111</b>





## DAFTAR TABEL

**Tabel 2.1** Kriteria kestabilan titik kesetimbangan sistem autonomous nonlinear 12

**Tabel 4.1** Laju perubahan populasi pada model I..... 30

**Tabel 4.2** Laju perubahan populasi pada model II ..... 46

**Tabel 4.3** Laju perubahan populasi pada model III..... 65

**Tabel 4.4** Nilai parameter yang digunakan dalam simulasi ..... 77



## DAFTAR GAMBAR

<b>Gambar 2.1</b>	Diagram Bifurkasi Transkritikal.....	15
<b>Gambar 4.1</b>	Diagram kompartemen interaksi $S(t)$ dan $I(t)$ pada model I.....	26
<b>Gambar 4.2</b>	Diagram kompartemen populasi <i>susceptible</i> pada model I.....	26
<b>Gambar 4.3</b>	Diagram kompartemen populasi <i>exposed</i> pada model I.....	28
<b>Gambar 4.4</b>	Diagram kompartemen populasi <i>infective</i> pada model I.....	29
<b>Gambar 4.5</b>	Diagram kompartemen populasi <i>treatment</i> pada model I.....	29
<b>Gambar 4.6</b>	Diagram kompartemen model I.....	32
<b>Gambar 4.7</b>	Diagram kompartemen interaksi $S(t)$ dan $I(t)$ pada model II.....	44
<b>Gambar 4.8</b>	Diagram kompartemen populasi <i>susceptible</i> pada model II.....	44
<b>Gambar 4.9</b>	Diagram kompartemen populasi <i>exposed</i> pada model II.....	45
<b>Gambar 4.10</b>	Diagram kompartemen populasi <i>infective</i> pada model II.....	45
<b>Gambar 4.11</b>	Diagram kompartemen populasi <i>treatment</i> pada model II.....	46
<b>Gambar 4.12</b>	Diagram kompartemen model II.....	47
<b>Gambar 4.13</b>	Diagram kompartemen interaksi $S(t)$ dan $I(t)$ pada model III ...	63
<b>Gambar 4.14</b>	Diagram kompartemen populasi <i>susceptible</i> pada model III .....	63
<b>Gambar 4.15</b>	Diagram kompartemen populasi <i>exposed</i> pada model III .....	64
<b>Gambar 4.16</b>	Diagram kompartemen populasi <i>infective</i> pada model III.....	64
<b>Gambar 4.17</b>	Diagram kompartemen populasi <i>treatment</i> pada model III.....	65
<b>Gambar 4.18</b>	Diagram kompartemen model III .....	66
<b>Gambar 4.19</b>	Potret fase model I untuk $\mathcal{R}_0^a > 1$ .....	77
<b>Gambar 4.20</b>	Perubahan jumlah populasi model I untuk $\mathcal{R}_0^a > 1$ .....	78
<b>Gambar 4.21</b>	Potret fase model I untuk $\mathcal{R}_0^a < 1$ .....	79
<b>Gambar 4.22</b>	Perubahan jumlah populasi model I untuk $\mathcal{R}_0^a < 1$ .....	80
<b>Gambar 4.23</b>	Diagram bifurkasi pada bidang $(\mathcal{R}_0^a, I^*)$ .....	81
<b>Gambar 4.24</b>	Perbandingan perubahan jumlah individu <i>susceptible</i> tanpa dan dengan kontrol.....	84
<b>Gambar 4.25</b>	Perbandingan perubahan jumlah individu <i>exposed</i> tanpa dan dengan kontrol.....	85



<b>Gambar 4.26</b> Perbandingan perubahan jumlah individu <i>infective</i> tanpa dan dengan kontrol .....	86
<b>Gambar 4.27</b> Perbandingan perubahan jumlah individu <i>treatment</i> tanpa dan dengan kontrol .....	87
<b>Gambar 4.28</b> Perbandingan perubahan jumlah total individu tanpa dan dengan kontrol .....	88
<b>Gambar 4.29</b> Perubahan pemberian kontrol optimal $u_*(t)$ .....	89
<b>Gambar 4.30</b> Perubahan nilai fungsi objektif ( $J$ ) .....	89



# BAB 1

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Penyakit menular adalah penyakit yang disebabkan oleh sebuah agen biologi, seperti virus, bakteri, atau parasit. Suatu individu dapat terjangkit penyakit menular melalui kontak langsung maupun tidak langsung dengan individu terinfeksi. Akibat kontak antarindividu tersebut terjadilah suatu infeksi baru yang menjadi tanda adanya kasus penyebaran penyakit menular. Penyebaran penyakit menular yang terus terjadi akan mengakibatkan kondisi yang disebut epidemi. Epidemi adalah kejadian tersebarnya penyakit menular dalam masyarakat yang jumlah penderitanya meningkat secara nyata melebihi keadaan yang lazim pada waktu dan daerah tertentu. Jika penyebaran penyakit tersebut tidak lenyap dan jumlah orang yang terinfeksi tetap stabil, maka suatu penyakit dikatakan berada dalam keadaan endemi.

Munculnya penyakit tersebut mendapat perhatian dari berbagai kalangan, khususnya para ahli dalam bidang kedokteran yang memang mempunyai peranan yang penting dalam mencegah meluasnya penyebaran penyakit. Perkembangan ilmu pengetahuan di dalam matematika juga turut memberikan peranan yang penting dalam mencegah meluasnya penyebaran penyakit. Peranan tersebut berupa model matematika yang dapat menggambarkan penyebaran suatu penyakit di masa yang akan datang dengan melihat kondisi masa sekarang atau masa lalu. Model matematika tersebut disebut model epidemi.

Model epidemi pertama kali diperkenalkan pada tahun 1927 oleh Kermack dan McKendrick, yaitu model *SIR (Susceptible Infective Removal)*. Model *SIR* menggambarkan suatu penyebaran penyakit dimana individu rentan (*susceptible*) dapat terinfeksi melalui proses interaksi dengan individu yang terinfeksi (*infective*), kemudian populasi yang sembuh (*removal*) telah memiliki kekebalan terhadap suatu penyakit sehingga individu tersebut tidak akan kembali menjadi populasi yang rentan terhadap penyakit. Semakin berkembangnya penelitian mengenai



model penyebaran penyakit menjadikan model *SIR* sebagai pijakan banyak ilmuwan untuk membuat model epidemi yang lebih khusus.

Untuk kasus penyakit yang lain, individu yang terinfeksi dapat sembuh kembali. Akan tetapi tidak ada jaminan bahwa individu yang sembuh dari penyakit tersebut akan kebal terhadap penyakit yang sama. Oleh sebab itu individu yang sembuh akan kembali masuk dalam populasi rentan. Zhou dan Hethcote (1994) telah memodelkan kasus penyebaran penyakit seperti ini dalam model epidemi tipe *SIS* (*Susceptible Infective Susceptible*).

Beberapa penyakit menular memiliki periode *exposed*. Periode *exposed* atau disebut juga dengan periode laten adalah masa bersembunyinya penyakit dalam tubuh ketika sistem kekebalan tubuh dalam kondisi baik. Adanya periode *exposed* menjadi alasan pembentukan model epidemi tipe *SEIS* (*Susceptible Exposed Infective Susceptible*) seperti yang dikemukakan oleh Fan, Li, dan Wang (2001).

Secara umum, model epidemi mempertimbangkan tingkat kejadian infeksi penyakit (*incidence rate*). Tingkat kejadian infeksi menyatakan banyaknya kasus infeksi baru akibat interaksi antara individu rentan dengan individu terinfeksi. Capasso dan Serio (1978) memperkenalkan tingkat kejadian infeksi nonlinear yang disebut tingkat kejadian infeksi tersaturasi. Tingkat kejadian semacam ini lebih efektif karena mempertimbangkan perubahan perilaku dan pengaruh kepadatan individu terinfeksi. Dalam beberapa tahun terakhir, penyebaran penyakit menular terjadi dalam bentuk yang beragam, seperti pada penyakit H1N1. Keberagaman yang terjadi yaitu adanya perbedaan periode *exposed* dalam setiap tubuh individu yang terinfeksi virus H1N1. Terdapat individu yang melewati fase periode *exposed*, dan ada yang tidak. Hal tersebut terjadi karena variasi virus dan keadaan jasmani yang berbeda dari setiap individu. Penyebaran penyakit menular tipe *SEIS* dengan perbedaan periode *exposed* dan tingkat kejadian tersaturasi telah dimodelkan oleh Wang (2012).

Penyebaran suatu penyakit dapat dikendalikan dengan pemberian obat pada individu terinfeksi. Oleh karena itu, pengobatan perlu dilakukan sebagai salah satu upaya untuk mencegah penyebaran penyakit. Model epidemi dengan adanya pengobatan memunculkan populasi baru dari individu terinfeksi yang telah mendapat pengobatan, yaitu populasi *treatment*. Pengobatan sering kali terkendala



oleh biaya, sehingga belum tentu optimal secara ekonomis. Dengan demikian perlu ditentukan pengobatan yang optimal agar biaya yang dibutuhkan minimum tetapi pengobatan yang dilakukan tetap efektif sebagai pengendali penyebaran penyakit.

Pada penelitian ini dikonstruksi model epidemi tipe *SEIT* (*Susceptible Exposed Infective Treatment*) dengan perbedaan periode *exposed* dan tingkat kejadian tersaturasi dengan tiga kasus yang berbeda. Model I dikonstruksi tanpa adanya pengobatan, model II dikonstruksi dengan pengobatan pada individu *infective*, dan model III dikonstruksi dengan pengobatan pada individu *exposed*. Model I dianalisis untuk memperoleh titik kesetimbangan, bilangan reproduksi dasar, syarat eksistensi dan kestabilan titik kesetimbangan model, serta kaitannya dengan bilangan reproduksi dasar. Model II dan III dilakukan analisis kestabilan dan kontrol optimal untuk meminimalkan jumlah individu *infective* dan biaya pengobatan. Pada bagian akhir, analisis yang telah diperoleh disimulasikan dengan memanfaatkan metode Runge-Kutta Orde Empat dan Sweep Maju-Mundur menggunakan *software* Matlab. Hasil simulasi yang diperoleh dari ketiga model dianalisis untuk memastikan hasil yang sesuai dengan hasil analisis kestabilan, serta mengetahui efektivitas pengobatan dalam mengontrol jumlah populasi terinfeksi, sehingga diperoleh kontrol optimal yang terbaik.

## **1.2 Rumusan Masalah**

Permasalahan yang dibahas dalam tesis ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana mengkonstruksi model epidemi tipe *SEIT* dengan perbedaan periode *exposed* dan tingkat kejadian tersaturasi dengan tiga kasus yang berbeda.
2. Bagaimana mendapatkan, menentukan eksistensi, dan menganalisis kestabilan titik-titik kesetimbangan ketiga model berdasarkan bilangan reproduksi dasar.
3. Bagaimana menentukan eksistensi dan mendapatkan kontrol optimal pengobatan, serta ketunggalan sistem optimal pada model II dan III.
4. Bagaimana efektivitas pengobatan dari model II dan III dalam mengontrol jumlah populasi terinfeksi, jika dilihat dari hasil simulasi numerik.



### 1.3 Batasan Masalah

Agar penyelesaian permasalahan di atas lebih fokus dan untuk menghindari perbedaan persepsi, berikut ini diberikan beberapa batasan.

1. Individu yang menjadi obyek penelitian ini adalah manusia.
2. Interaksi terjadi dalam satu wilayah tanpa adanya individu yang masuk dan keluar dari wilayah tersebut.
3. Individu yang baru lahir memiliki kekebalan alami, sehingga masuk dalam populasi *susceptible*.
4. Individu *exposed* tidak memiliki kemampuan menular.
5. Individu *exposed* tidak dapat pulih menjadi individu *susceptible*.
6. *Recovery* tidak tetap, sehingga individu yang diberi pengobatan dapat menjadi rentan dan terinfeksi kembali.

### 1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Mengkonstruksi model epidemi tipe *SEIT* dengan perbedaan periode *exposed* dan tingkat kejadian tersaturasi dengan tiga kasus yang berbeda.
2. Mendapatkan, menentukan eksistensi, dan menganalisis kestabilan titik-titik kesetimbangan ketiga model berdasarkan bilangan reproduksi dasar.
3. Menentukan eksistensi dan mendapatkan kontrol optimal pengobatan, serta ketunggalan sistem optimal pada model II dan III.
5. Mengetahui efektivitas pengobatan dari model II dan III dalam mengontrol jumlah populasi terinfeksi, jika dilihat dari hasil simulasi numerik.

### 1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Mengetahui bahwa peristiwa alam seperti penyebaran penyakit menular dapat dimodelkan secara matematis.
2. Memberikan informasi bahwa pemberian kontrol pengobatan dapat menjadi salah satu solusi dalam mengatasi masalah penyebaran penyakit.



## BAB 2

### KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI

#### 2.1 Model Epidemi dengan Kontrol Optimal

Penyebaran penyakit dapat dimodelkan dengan berbagai macam bentuk kompartemen, seperti *SIS*, *SIR*, *SIRS*, *SEIS*, dan lain sebagainya. Pengendalian penyebaran penyakit perlu dilakukan untuk meminimalkan jumlah individu terinfeksi. Untuk mengoptimalkan pengendalian penyebaran suatu penyakit perlu dikaji model optimasi. Optimasi pada sistem dinamik pada umumnya menggunakan kontrol optimal. Masalah kontrol optimal dalam model penyebaran penyakit telah banyak dibahas, akan tetapi belum ada penelitian tentang model kompartemen *SEIT*. Oleh sebab itu perlu dilakukan penelitian lebih lanjut masalah kontrol optimal pada model penyebaran penyakit menular tipe *SEIT*.

Upaya pengendalian suatu penyakit yang mewabah dapat dilakukan dengan tindakan pengobatan (*treatment*) maupun vaksinasi. Kontrol optimal pengobatan telah dikemukakan oleh beberapa peneliti, salah satunya adalah Goldman dan Lightwood (1996). Goldman dan Lightwood mengkaji model sederhana dari penyebaran penyakit tipe *SIS* dengan meminimalkan biaya pengobatan medis. Kontrol optimal vaksinasi digunakan oleh El hia, dkk. (2012) untuk mengendalikan penyebaran penyakit Influenza A (H1N1). El hia, dkk. memodelkan penyebaran penyakit H1N1 dengan model *SIR*, dan memberikan kontrol (vaksinasi) yang optimal untuk meminimalkan jumlah individu terinfeksi dan biaya vaksinasi. Kontrol optimal vaksinasi dan pengobatan dapat digunakan bersama, seperti pada model *SIRS* yang dikemukakan oleh Chen dan Sun (2014). Chen dan Sun membahas strategi optimal untuk meminimalkan jumlah individu terinfeksi dan biaya yang terkait dengan vaksinasi dan pengobatan. Berbeda dengan penelitian-penelitian sebelumnya, pada tesis ini model penyebaran penyakit dengan kontrol optimal yang dibahas adalah model epidemi tipe *SEIT* (*Susceptible Exposed Infective Treatment*) dengan perbedaan periode *exposed* dan tingkat kejadian tersaturasi.



## 2.2 Tingkat Kejadian Nonlinear

Misalkan  $S(t)$  dan  $I(t)$  menyatakan jumlah individu *susceptible* dan *infective* saat waktu  $t$ . Tingkat kejadian infeksi merupakan fungsi yang menyatakan banyaknya individu yang terinfeksi penyakit akibat kontak langsung dengan individu terinfeksi. Tingkat kejadian infeksi penyakit pada model epidemi biasanya dinyatakan dalam fungsi linear  $g(I) = \beta I$  sehingga

$$g(I)S = \beta IS, \quad (2.1)$$

dengan  $\beta$  adalah tingkat transmisi dari individu *infective* yang berinteraksi dengan individu *susceptible*.

Tingkat kejadian infeksi yang sebenarnya tidak benar-benar linear karena dipengaruhi oleh perubahan perilaku individu rentan, atau akibat dari kepadatan individu terinfeksi. Dengan mempertimbangkan efek dari perubahan perilaku, Liu, dkk. (1986) memperkenalkan tingkat kejadian nonlinear, yaitu

$$g(I)S = \frac{\beta I^p S}{1 + \alpha I^q}, \quad (2.2)$$

dengan  $\beta I^p$  mengukur kekuatan infeksi penyakit dan  $\frac{1}{1 + \alpha I^q}$  menyatakan pengaruh hambatan (*inhibition*) yang ditimbulkan dari perubahan perilaku individu ketika jumlah individu terinfeksi meningkat. Parameter  $\beta, p, \alpha$ , dan  $q$  adalah konstanta positif. Tingkat kejadian (2.1) adalah kasus khusus dari tingkat kejadian nonlinear (2.2) dengan  $p = 1$  dan  $\alpha = 0$  atau  $q = 0$ .

Tang, dkk. (2008) membagi fungsi nonlinear  $g(I)$  pada persamaan (2.2) menjadi tiga tipe :

- Unbounded incidence function*:  $p > q$ . Kasus ini dibahas oleh Hethcote dan Driessche (1991) yang menemukan model *SEIRS* dengan  $p = q + 1$ .
- Saturated incidence function*:  $p = q$ . Ketika  $p = q = 1$ , maka fungsi menjadi  $g(I) = \beta I / (1 + \alpha I)$ . Kasus ini dikemukakan oleh Capasso dan Serio (1978) yang mendeskripsikan tentang “*crowding effect*” atau “*protection measures*” pada model epidemi Kolera di Bari pada tahun 1973. Global dinamik dari model *SIRS* dengan  $p = q = 2$  dibahas oleh Ruan dan Wang (2003) serta Tang, dkk. (2008). Global dinamik dari model *SIRS* dengan  $p = q > 0$  telah dibahas oleh Li dan Wang (2009).



c. *Nonmonotone incidence function*:  $p < q$ . Menurut Capasso dan Serio (1978), fungsi tersebut dapat digunakan untuk menafsirkan “efek psikologis” : untuk setiap individu terinfeksi yang berjumlah besar, kekuatan infeksi penyakit mungkin berkurang saat jumlah individu terinfeksi bertambah. Hal tersebut dikarenakan adanya sejumlah besar populasi individu terinfeksi yang mungkin cenderung mengurangi jumlah interaksi per satuan waktu, seperti yang terlihat dalam kasus penyebaran SARS oleh Wang (2006). Untuk kasus  $p = 1$  dan  $q = 2$  telah dibahas oleh Xiao dan Ruan (2007).

### 2.3 Sistem Dinamik

Menurut Nagle, dkk. (2012), suatu sistem yang dapat diketahui nilainya di masa yang akan datang jika diberikan suatu kondisi pada masa sekarang atau masa yang lalu disebut dengan sistem dinamik. Sistem dinamik merupakan suatu keadaan yang dipengaruhi oleh waktu ( $t$ ). Jika  $t$  kontinu, bentuk sistem dinamik dinyatakan sebagai sistem persamaan diferensial. Sistem persamaan diferensial orde satu yang berbentuk

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n), i = 1, \dots, n,$$

dengan  $f_i$  adalah fungsi bernilai riil yang tidak bergantung secara eksplisit terhadap  $t$  disebut sistem *autonomous*. Terdapat dua jenis sistem *autonomous*, yaitu sistem *autonomous* linear dan nonlinear. Pada penelitian ini, sistem yang digunakan adalah sistem *autonomous* nonlinear.

### 2.4 Titik Keseimbangan

Misal diberikan suatu sistem *autonomous* empat dimensi

$$\begin{aligned}\dot{w} &= e(w, x, y, z) \\ \dot{x} &= f(w, x, y, z) \\ \dot{y} &= g(w, x, y, z) \\ \dot{z} &= h(w, x, y, z)\end{aligned}\tag{2.3}$$

Titik  $(w^*, x^*, y^*, z^*)$  yang memenuhi  $e(w^*, x^*, y^*, z^*) = 0$ ,  $f(w^*, x^*, y^*, z^*) = 0$ ,  $g(w^*, x^*, y^*, z^*) = 0$ , dan  $h(w^*, x^*, y^*, z^*) = 0$  disebut titik kritis sistem (2.3).



Titik kritis  $(w^*, x^*, y^*, z^*)$  merupakan solusi sistem (2.3) yang bernilai konstan sebab di titik  $(w^*, x^*, y^*, z^*)$ , nilai  $\frac{dw^*}{dt} = 0$ ,  $\frac{dx^*}{dt} = 0$ ,  $\frac{dy^*}{dt} = 0$ , dan  $\frac{dz^*}{dt} = 0$  sehingga titik kritis disebut juga disebut titik tetap atau titik kesetimbangan (Boyce & DiPrima, 2009).

## 2.5 Kestabilan Lokal

Diberikan sistem *autonomous* linear sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} &= a_{11}w + a_{12}x + a_{13}y + a_{14}z \\ \frac{dx}{dt} &= a_{21}w + a_{22}x + a_{23}y + a_{24}z \\ \frac{dy}{dt} &= a_{31}w + a_{32}x + a_{33}y + a_{34}z \\ \frac{dz}{dt} &= a_{41}w + a_{42}x + a_{43}y + a_{44}z\end{aligned}\quad (2.4)$$

Misalkan  $\vec{x} = (w, x, y, z)$ , maka sistem persamaan (2.4) dapat ditulis sebagai

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}, \text{ dengan } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \vec{x} = \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \text{ Dalam hal ini } A \text{ disebut}$$

matriks koefisien sistem (2.4).

Misalkan akar-akar persamaan karakteristik sistem (2.4) adalah  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  dan  $\lambda_4$ , maka  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  dan  $\lambda_4$  disebut nilai eigen. Nilai eigen digunakan untuk menentukan jenis kestabilan titik-titik kesetimbangan sistem (2.4). Nilai eigen diperoleh dengan menggunakan rumus  $\det(A - \lambda I) = 0$ . Kriteria jenis kestabilan titik kesetimbangan sistem (2.4) berdasarkan nilai eigen dijelaskan pada Teorema 2.1.

**Teorema 2.1** Misalkan  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  dan  $\lambda_4$  adalah nilai eigen matriks koefisien  $A$  sistem *autonomous* linear dengan  $\det(A) \neq 0$ . Titik kesetimbangan  $(w^*, x^*, y^*, z^*)$  bersifat

- stabil asimtotik, jika bagian riil dari  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  dan  $\lambda_4$  keempatnya negatif,
- stabil tetapi bukan stabil asimtotik, jika bagian riil dari  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  dan  $\lambda_4$  keempatnya nol (sehingga  $\lambda_{1,2} = \pm qi$ ),



- c. tidak stabil, jika salah satu dari  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  dan  $\lambda_4$  memiliki bagian riil positif (Edwards & Penney, 2008).

Tanda positif atau negatif pada bagian riil dari nilai-nilai eigen dapat diketahui dengan menggunakan Teorema 2.2 (Teorema Vieta) berikut.

**Teorema 2.2** Didefinisikan jumlah simetris ke- $k$  ( $\sigma_k$ ) dari suatu himpunan sebagai jumlah dari perkalian  $k$  elemen yang ada pada himpunan tersebut. Sebagai contoh dari himpunan yang beranggotakan  $a, b, c, d$  diperoleh :

$$\sigma_1 = a + b + c + d$$

$$\sigma_2 = ab + ac + ad + bc + bd + cd$$

$$\sigma_3 = abc + abd + acd + bcd$$

$$\sigma_4 = abcd.$$

Jika  $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n\}$  adalah akar-akar dari polinomial

$$P(x) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + a_{n-2} \lambda^{n-2} + \dots + a_1 \lambda + a_0,$$

maka berlaku

$$\sigma_k = (-1)^k \cdot \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

untuk  $1 \leq k \leq n$ .

Untuk sistem *autonomous* yang berbentuk nonlinear seperti berikut

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= e(w, x, y, z) \\ \frac{dx}{dt} &= f(w, x, y, z) \\ \frac{dy}{dt} &= g(w, x, y, z) \\ \frac{dz}{dt} &= h(w, x, y, z), \end{aligned} \tag{2.5}$$

anggap bahwa fungsi  $f$  dan  $g$  mempunyai turunan parsial dan merupakan fungsi yang kontinu. Untuk memperoleh titik kesetimbangan perlu dilakukan ekspansi deret Taylor di sekitar titik  $(x^*, y^*)$ , sehingga fungsi  $f$  dan  $g$  dapat dinyatakan sebagai



$$\begin{aligned}
e(w, x, y, z) &= e(w^*, x^*, y^*, z^*) + \frac{\partial e(w^*, x^*, y^*, z^*)}{\partial w} (w - w^*) \\
&+ \frac{\partial e(w^*, x^*, y^*, z^*)}{\partial x} (x - x^*) + \frac{\partial e(w^*, x^*, y^*, z^*)}{\partial y} (y - y^*) \\
&+ \frac{\partial e(w^*, x^*, y^*, z^*)}{\partial z} (z - z^*) + \eta_1(w, x, y, z)
\end{aligned} \quad (2.6.a)$$

$$\begin{aligned}
f(w, x, y, z) &= f(w^*, x^*, y^*, z^*) + \frac{\partial f(w^*, x^*, y^*, z^*)}{\partial w} (w - w^*) \\
&+ \frac{\partial f(w^*, x^*, y^*, z^*)}{\partial x} (x - x^*) + \frac{\partial f(w^*, x^*, y^*, z^*)}{\partial y} (y - y^*) \\
&+ \frac{\partial f(w^*, x^*, y^*, z^*)}{\partial z} (z - z^*) + \eta_2(w, x, y, z)
\end{aligned} \quad (2.6.b)$$

$$\begin{aligned}
g(w, x, y, z) &= g(w^*, x^*, y^*, z^*) + \frac{\partial g(w^*, x^*, y^*, z^*)}{\partial w} (w - w^*) \\
&+ \frac{\partial g(w^*, x^*, y^*, z^*)}{\partial x} (x - x^*) + \frac{\partial g(w^*, x^*, y^*, z^*)}{\partial y} (y - y^*) \\
&+ \frac{\partial g(w^*, x^*, y^*, z^*)}{\partial z} (z - z^*) + \eta_3(w, x, y, z)
\end{aligned} \quad (2.6.c)$$

$$\begin{aligned}
h(w, x, y, z) &= h(w^*, x^*, y^*, z^*) + \frac{\partial h(w^*, x^*, y^*, z^*)}{\partial w} (w - w^*) \\
&+ \frac{\partial h(w^*, x^*, y^*, z^*)}{\partial x} (x - x^*) + \frac{\partial h(w^*, x^*, y^*, z^*)}{\partial y} (y - y^*) \\
&+ \frac{\partial h(w^*, x^*, y^*, z^*)}{\partial z} (z - z^*) + \eta_4(w, x, y, z)
\end{aligned} \quad (2.6.d)$$

dengan  $\eta_1(w, x, y, z)$ ,  $\eta_2(w, x, y, z)$ ,  $\eta_3(w, x, y, z)$ , dan  $\eta_4(w, x, y, z)$  adalah suku sisa.

Berdasarkan persamaan (2.6.a), (2.6.b), (2.6.c), dan (2.6.d), serta mengingat

$$\frac{dw}{dt} = \frac{d(w - w^*)}{dt}, \frac{dx}{dt} = \frac{d(x - x^*)}{dt}, \frac{dy}{dt} = \frac{d(y - y^*)}{dt}, \text{ dan } \frac{dz}{dt} = \frac{d(z - z^*)}{dt}$$

maka sistem persamaan (2.5) dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} w - w^* \\ x - x^* \\ y - y^* \\ z - z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e(w^*, x^*, y^*, z^*) \\ f(w^*, x^*, y^*, z^*) \\ g(w^*, x^*, y^*, z^*) \\ h(w^*, x^*, y^*, z^*) \end{bmatrix} + J \begin{bmatrix} (x - x^*) \\ (x - x^*) \\ (y - y^*) \\ (z - z^*) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(w, x, y, z) \\ \eta_2(w, x, y, z) \\ \eta_3(w, x, y, z) \\ \eta_4(w, x, y, z) \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Dengan  $J$  adalah matriks



$$\begin{bmatrix} \frac{\partial e(w^*, x^*, y^*, z^*)}{\partial w} & \frac{\partial e(w^*, x^*, y^*, z^*)}{\partial x} & \frac{\partial e(w^*, x^*, y^*, z^*)}{\partial y} & \frac{\partial e(w^*, x^*, y^*, z^*)}{\partial z} \\ \frac{\partial f(w^*, x^*, y^*, z^*)}{\partial w} & \frac{\partial f(w^*, x^*, y^*, z^*)}{\partial x} & \frac{\partial f(w^*, x^*, y^*, z^*)}{\partial y} & \frac{\partial f(w^*, x^*, y^*, z^*)}{\partial z} \\ \frac{\partial g(w^*, x^*, y^*, z^*)}{\partial w} & \frac{\partial g(w^*, x^*, y^*, z^*)}{\partial x} & \frac{\partial g(w^*, x^*, y^*, z^*)}{\partial y} & \frac{\partial g(w^*, x^*, y^*, z^*)}{\partial z} \\ \frac{\partial h(w^*, x^*, y^*, z^*)}{\partial w} & \frac{\partial h(w^*, x^*, y^*, z^*)}{\partial x} & \frac{\partial h(w^*, x^*, y^*, z^*)}{\partial y} & \frac{\partial h(w^*, x^*, y^*, z^*)}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Karena  $e(w^*, x^*, y^*, z^*) = f(w^*, x^*, y^*, z^*) = g(w^*, x^*, y^*, z^*) = h(w^*, x^*, y^*, z^*) = 0$ , maka sistem persamaan (2.7) dapat ditulis

$$\begin{bmatrix} \frac{dr}{dt} \\ \frac{ds}{dt} \\ \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} r \\ s \\ u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(w, x, y, z) \\ \eta_2(w, x, y, z) \\ \eta_3(w, x, y, z) \\ \eta_4(w, x, y, z) \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Bentuk sistem persamaan (2.8) dapat ditulis sebagai

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = J\vec{q} + \vec{\eta}, \quad (2.9)$$

dengan  $J$  adalah matriks Jacobi atau *Partial Derivative Matriks*. Untuk hampiran orde satu, suku sisa memenuhi sifat-sifat

$$\lim_{(w, x, y, z) \rightarrow (w^*, x^*, y^*, z^*)} \frac{\eta_i(w, x, y, z)}{\|\vec{q}\|} = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

dengan  $\vec{q} = (w - w^*, x - x^*, y - y^*, z - z^*)^T$ . Akibatnya nilai  $\vec{\eta}$  dapat diabaikan, dan di sekitar  $(w^*, x^*, y^*, z^*)$  sistem nonlinear (2.9) dapat dihampiri oleh sistem linear

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = J\vec{q}. \quad (2.10)$$

(Boyce & DiPrima, 2009).

Jika nilai eigen yang diperoleh dari matriks Jacobi adalah  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_4$  dan  $\text{Re}(\lambda_i) \neq 0, (i = 1, 2, 3, 4)$  maka kestabilan dari titik kesetimbangan sistem *autonomous* nonlinear yang dilinearkan dapat ditentukan berdasarkan analisis kestabilan dari sistem *autonomous* linear, seperti yang ditampilkan pada Tabel 2.1.



Oleh sebab itu, kestabilan yang diperoleh hanya bersifat lokal atau di daerah sekitar titik kesetimbangan.

**Tabel 2.1** Kriteria kestabilan titik kesetimbangan sistem *autonomous* nonlinear

Nilai Karakteristik	Bentuk	Kestabilan
$\lambda_{1,2,3,4} > 0$	Simpul	Tidak stabil
Minimal satu $\lambda > 0$	Simpul	Tidak stabil pelana
$\lambda_{1,2,3,4} < 0$	Simpul	Stabil asimtotik
$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 > 0$	Simpul	Tidak stabil
$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 < 0$	Simpul	Stabil asimtotik
$\lambda_{1,2,3,4} = \alpha \pm i\omega, \alpha < 0$	Spiral	Stabil asimtotik
$\lambda_{1,2,3,4} = \alpha \pm i\omega, \alpha > 0$	Spiral	Tidak stabil
$\lambda_{1,2,3,4} = \pm i\omega$	Elips/lingkaran	Tidak dapat ditentukan

Untuk matriks Jacobi yang sulit ditentukan persamaan karakteristiknya, kestabilan dari titik kesetimbangan dapat ditentukan berdasarkan Teorema 2.3 berikut.

**Teorema 2.3** Diberikan matriks  $J$  pada sistem persamaan (2.10) berukuran  $n \times n$  dengan elemen-elemen didalamnya adalah  $a_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$ ). Maka kestabilan matriks  $J$  dapat ditentukan berdasarkan kondisi berikut.

- (i)  $a_{ii} \leq 0$  untuk semua  $i$ ,
- (ii)  $a_{ii} \neq 0$  untuk setidaknya satu  $i$ ,
- (iii)  $a_{ij}a_{ji} \leq 0$  untuk semua  $i \neq j$ ,
- (iv) untuk setiap urutan dari tiga atau lebih indeks  $i, j, k, \dots, q, r$  (dengan  $i \neq j \neq k \neq \dots \neq q \neq r$ ), perkalian  $a_{ij}a_{jk} \dots a_{qr}a_{ri} = 0$ ,
- (v)  $\det J \neq 0$ .

(Quirk & Ruppert, 1965)

## 2.6 Kestabilan Global

Titik kesetimbangan yang bersifat stabil lokal juga terdapat kemungkinan bersifat stabil global. Kestabilan global dapat diperoleh dengan Fungsi Lyapunov dan Teorema Poincaré – Dulac.



### 2.6.1 Fungsi Lyapunov

Suatu fungsi  $L : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , dengan  $A$  adalah persekitaran pada  $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$  dikatakan definit positif (definit negatif) pada  $A$  jika  $L(\vec{x}) > 0$  ( $L(\vec{x}) < 0$ ),  $\forall \vec{x} \in A \setminus \{\vec{0}\}$  dan  $L(\vec{0}) = 0$ . Misalkan  $\vec{x}^*$  adalah suatu titik kesetimbangan sistem persamaan diferensial  $\frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x}, t)$ . Suatu fungsi  $L : W \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  disebut fungsi Lyapunov lemah untuk  $x^*$  jika terdapat suatu persekitaran  $W \subseteq \mathbb{R}^n$  pada  $\vec{x}^*$  yang memenuhi :

1.  $L(\vec{x}^*) = 0$  dan  $L(\vec{x}) > 0, \forall \vec{x}, \vec{x}^* \in W$  dan  $\vec{x} \neq \vec{x}^*$ .
2.  $\dot{L}(\vec{x}) \leq 0, \forall \vec{x} \in W$ .

Fungsi  $L$  disebut fungsi Lyapunov kuat untuk  $x^*$  jika terdapat suatu persekitaran  $W$  pada  $\vec{x}^*$  yang memenuhi kondisi (1) dan  $\dot{L}(\vec{x}) < 0, \forall \vec{x}, \vec{x}^* \in W$  dan  $\vec{x} \neq \vec{x}^*$ . Titik kesetimbangan  $\vec{x}^*$  bersifat stabil global jika terdapat suatu fungsi Lyapunov lemah untuk  $\vec{x}^*$ , dan  $\vec{x}^*$  bersifat stabil asimtotik global jika terdapat suatu fungsi Lyapunov kuat untuk  $\vec{x}^*$  (Robinson, 2004).

**Teorema 2.4** Sebuah himpunan  $D$  disebut *invariant* positif terhadap sistem persamaan diferensial nonlinear  $\frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x}, t)$ , jika  $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \in D$  maka  $\vec{x}(\vec{x}_0, t) \in D, \forall t \geq 0$ . Misalkan  $L$  adalah suatu fungsi Lyapunov lemah. Didefinisikan

$$M_W = \{\vec{x} \in W \mid \dot{L}(\vec{x}) = 0\},$$

kemudian diasumsikan bahwa persekitaran  $W$  cukup kecil,  $\forall \vec{x} \in M_W \setminus \{\vec{x}^*\}$  trayektori  $\vec{x}(\vec{x}_0, t)$  bergerak keluar dari  $M_W$  menuju  $W \setminus M_W$  sepanjang  $t$  positif kecil ( $\{\vec{x}^*\}$  merupakan himpunan *invariant* positif terbesar pada  $M_W$ ) maka  $\vec{x}^*$  bersifat stabil asimtotik global (Robinson, 2004).

### 2.6.2 Teorema Poincaré – Dulac

Kestabilan global dari titik kesetimbangan dapat ditentukan berdasarkan Teorema Poincaré (Teorema 2.5) dan Dulac (Teorema 2.6) berikut.

**Teorema 2.5** Misalkan  $\mathcal{D}$  adalah daerah terbatas pada bidang  $x - y$  dan sistem *autonomous* dua dimensi, yaitu



$$\frac{dx}{dt} = f(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y)$$

adalah sistem dinamik dimana  $f$  dan  $g$  kontinu dan diferensiabel. Jika trayektori sistem dinamik selalu berada pada  $\mathcal{D}$  untuk semua  $t \geq 0$ , maka trayektori dapat berupa salah satu diantara berikut ini.

1. Orbit periodik.
2. Menuju orbit periodik.
3. Menuju titik kesetimbangan jika  $t \rightarrow \infty$ .

**Teorema 2.6** Andaikan  $\mathcal{D}$  adalah suatu daerah terhubung sederhana pada  $\mathbb{R}^2$  dan  $B(x, y)$  adalah suatu fungsi bernilai riil pada  $\mathcal{D}$ . Fungsi  $f$  dan  $g$  adalah ruas kanan dari sistem (2.5). Jika

$$\text{div}(Bf, Bg) = \frac{\partial(Bf)}{\partial x} + \frac{\partial(Bg)}{\partial y} \neq 0,$$

dan  $\text{div}(Bf, Bg)$  tidak berubah tanda pada daerah  $\mathcal{D}$ , maka tidak terdapat orbit periodik pada daerah  $\mathcal{D}$ .

Berdasarkan Teorema 2.5 dan 2.6, jika sistem dinamik yang solusinya terbatas pada daerah  $\mathcal{D}$  tidak memiliki orbit periodik, maka orbit solusi akan menuju titik kesetimbangan yang stabil lokal, sehingga titik kesetimbangan tersebut merupakan titik kesetimbangan yang stabil global (Richard, 2002).

## 2.7 Bilangan Reproduksi Dasar

Untuk mengetahui dinamika penyebaran suatu penyakit, digunakan suatu bilangan yang menjadi ukuran untuk mengetahui apakah dalam suatu populasi terjadi endemi atau tidak. Bilangan tersebut dikenal sebagai bilangan reproduksi dasar ( $\mathcal{R}_0$ ), yang merupakan ambang batas (*threshold*) terjadinya penyebaran penyakit. Menurut Berihun (2009), bilangan reproduksi dasar merupakan bilangan yang menyatakan bertambahnya jumlah individu *infective* terhadap berkurangnya jumlah individu *susceptible* ketika satu individu *infective* dimasukkan ke dalam populasi yang sepenuhnya *susceptible*.



Jika  $\mathcal{R}_0 < 1$ , maka rata-rata individu yang terinfeksi menghasilkan kurang dari satu individu terinfeksi baru selama periode menular. Sebaliknya jika  $\mathcal{R}_0 > 1$ , maka setiap individu yang terinfeksi memproduksi rata-rata lebih dari satu infeksi baru (Driessche & Wetmough, 2002).

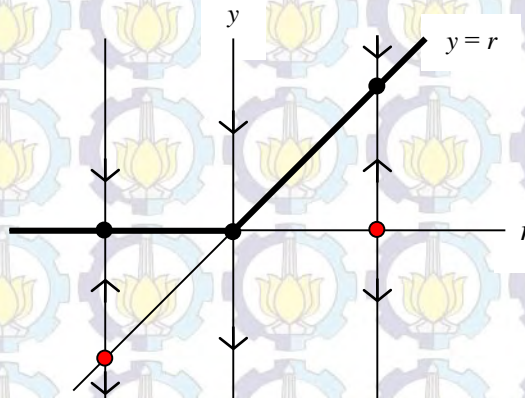
## 2.8 Bifurkasi Transkritikal

Teori bifurkasi membicarakan tentang perubahan perilaku solusi dari sistem persamaan diferensial. Menurut Wiggins (1990), bifurkasi transkritikal terjadi ketika nilai parameter berubah, kemudian terjadi perubahan jumlah titik kesetimbangan, dari dua titik kesetimbangan (dengan perilaku stabil dan tidak stabil) bergabung menjadi satu. Selanjutnya titik tersebut kembali menjadi dua titik kesetimbangan dengan perilaku berkebalikan dari perilaku awal, yang stabil menjadi tidak stabil dan sebaliknya yang tidak stabil menjadi stabil.

Sebagai contoh diberikan persamaan berikut,

$$\frac{dy}{dt} = ry - y^2 \quad (2.11)$$

dengan  $r$  dan  $y$  dapat bernilai positif atau negatif. Persamaan (2.11) mempunyai dua titik kesetimbangan, yaitu  $y = 0$  dan  $y = r$ . Ketika  $r$  bernilai negatif, titik kesetimbangan  $y = 0$  stabil dan titik kesetimbangan  $y = r$  tidak stabil. Sementara itu ketika  $r$  bernilai positif, titik kesetimbangan  $y = 0$  tidak stabil dan titik kesetimbangan  $y = r$  stabil. Jadi, bifurkasi transkritikal terjadi ketika  $r = 0$ , sehingga  $r = 0$  disebut ambang batas atau titik bifurkasi, seperti pada Gambar 2.1.



**Gambar 2.1** Diagram Bifurkasi Transkritikal



## 2.9 Kontrol Optimal

Tujuan utama dari permasalahan kontrol optimal yaitu untuk mencari nilai kontrol  $u(t)$  yang dimasukkan ke dalam fungsi dinamik dan memenuhi kendala fisik atau konstrain. Pada waktu yang sama, dapat ditentukan nilai maksimum atau minimum yang memenuhi kriteria pada fungsi objektif. Dengan kata lain nilai kontrol yang optimum dapat ditentukan pada saat keadaan dan waktu yang sama berdasarkan fungsi objektif (fungsi tujuan). Formulasi masalah kontrol optimal terdiri dari deskripsi secara matematis suatu sistem atau model, menentukan fungsi objektif, dan kendala atau syarat batas yang berlaku, dengan tujuan untuk mencari nilai  $u(t)$  yang dapat mengoptimalkan fungsi objektif.

### 2.9.1 Teori Kontrol optimal

Pada umumnya, berdasarkan sistem dinamik

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \vec{f}(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t), \quad (2.12)$$

masalah kontrol optimal dapat diformulasikan sebagai

$$J(u(t)) = S(\vec{x}(t_f, t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} V(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t) dt \quad (2.13)$$

dengan kondisi batas

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$$

$$\vec{x}(t_f) = \vec{x}_f.$$

Fungsi objektif (2.13) merupakan kuantitas dari suatu sistem.

Kontrol  $\vec{u}_*(t)$  merupakan kontrol optimal, jika disubstitusikan ke dalam sistem (2.12) akan diperoleh *state* yang optimal  $\vec{x}_*(t)$  dan pada saat yang sama juga mengoptimalkan fungsi objektif (2.13) yang kemudian dinotasikan dengan  $J(u_*(t))$  atau  $J_*$ . *State* optimal  $\vec{x}_*(t)$  dibatasi oleh kondisi batas, yaitu kondisi awal dan kondisi akhir.

Pada fungsi objektif  $J(u(t))$  pada persamaan (2.13) secara umum dapat dinyatakan sebagai bentuk Bolza. Pada saat  $S = 0$  maka persamaan (2.13) disebut bentuk Lagrange, sedangkan pada saat  $V = 0$  persamaan (2.13) disebut bentuk



Meyer. Dengan waktu akhir tetap atau bebas, dan keadaan (*state*) akhir seluruhnya atau sebagian bebas atau tetap (Naidu, 2002).

### 2.9.2 Fungsi Objektif

Tujuan yang dicapai dalam permasalahan kontrol optimal pada penelitian ini adalah mendapatkan pengobatan optimal dengan meminimalkan jumlah populasi *infective* dan biaya pengobatan. Secara matematika, permasalahan ini adalah meminimalkan fungsi objektif berikut

$$J(u_j) = \int_{t_0}^{t_f} \left( I(t) + \frac{C}{2} u_j^2(t) \right) dt, \quad (2.14)$$

dengan  $u_j(t)$  ( $j = 1, 2$ ) masing-masing adalah kontrol optimal  $u_1$  pada model II dan kontrol optimal  $u_2$  pada model III. Sedangkan  $C$  adalah bobot pada biaya pengobatan,  $t_0$  adalah waktu awal, dan  $t_f$  adalah waktu akhir. Kemudian akan diperoleh  $u_*(t)$  sehingga berlaku

$$J(u_{j*}(t)) = \min\{J(u_j(t)) : u_j \in \mathcal{U}\},$$

dengan  $\mathcal{U} = \{u_j(t) \mid 0 \leq u_j \leq 0.9, t \in [0, t_f], j = 1, 2\}$ .

(El hia, Balatif, Bouyaghroumni, Labriji, & Rachik, 2012).

### 2.9.3 Eksistensi Kontrol Optimal

Sebelum membahas tentang eksistensi kontrol optimal, terlebih dahulu diberikan definisi tentang himpunan dan fungsi konveks. Himpunan  $C \subset \mathbb{R}^n$  dikatakan konveks, jika setiap  $x, y \in C$  maka  $z = \theta x + (1 - \theta)y$ ,  $\forall \theta \in [0, 1]$  adalah anggota  $C$ . Fungsi  $f(x)$  dikatakan konveks pada interval  $a \leq x \leq b$ , jika untuk semua  $0 \leq \varepsilon \leq 1$  dan  $a \leq x_1 \leq x_2 \leq b$  berlaku

$$\theta f(x_1) + (1 - \theta)f(x_2) \leq f(\varepsilon\theta_1 + (1 - \theta)x_2).$$

Eksistensi kontrol optimal dapat dibuktikan berdasarkan Teorema 2.7 berikut.

**Teorema 2.7** Diberikan suatu sistem dari  $n$  variabel *state*, yaitu

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_4(t) \end{bmatrix},$$



dan diberikan  $u(t)$  sebagai variabel kontrol pada himpunan kontrol  $\mathcal{U}$  yang memenuhi persamaan diferensial (2.12) dengan fungsi objektif (2.13). Kontrol optimal  $\min J(u(t))$  dikatakan eksis jika memenuhi kondisi berikut.

- (i) Himpunan kontrol  $\mathcal{U}$  tidak kosong.
- (ii) Himpunan kontrol  $\mathcal{U}$  konveks dan tertutup.
- (iii) Persamaan ruas kanan (*Right Hand Side*) dari sistem dinamik kontinu terbatas oleh fungsi linear pada *state* dan kontrol optimal.
- (iv) Integrand dari fungsi objektif konveks pada  $\mathcal{U}$ .
- (v) Integrand dari fungsi objektif terbatas.

(Fleming & Rishel, 1975)

#### 2.9.4 Ketunggalan Sistem Optimal

Untuk membuktikan ketunggalan solusi dari sistem optimal untuk interval waktu yang kecil digunakan Lemma dan Teorema berikut.

**Lemma 2.1** Fungsi  $u_*(c) = \min(\max(c, a), b)$  adalah *Lipschitz continuous* pada  $c$ , dengan  $a < b$  adalah beberapa konstanta positif yang tetap.

**Teorema 2.8** Untuk  $t_f$  yang cukup kecil, solusi terbatas untuk sistem optimal adalah tunggal.

(Joshi, 2002).

#### 2.9.5 Prinsip Pontryagin Maksimum

Prinsip maksimum digunakan untuk memperoleh kontrol terbaik pada sistem dinamik dari *state* awal hingga *state* akhir, yaitu dengan memaksimalkan fungsi objektif dengan kontrol  $u(t)$  terbatas pada  $(u(t) \in \mathcal{U})$ . Permasalahan ini telah dikembangkan oleh L. S. Pontryagin dan rekan kerjanya pada tahun 1950 yang diaplikasikan untuk semua masalah kalkulus variasi, sehingga prinsip ini disebut Prinsip Pontryagin Maksimum.

Menurut Bryson dan Ho (1975), Prinsip Pontryagin Maksimum menyatakan secara informal bahwa persamaan Hamiltonian akan dimaksimalkan sepanjang  $\mathcal{U}$



yang merupakan himpunan kontrol (Bryson & Ho, 1975). Hasilnya juga dapat dinamakan Prinsip Pontryagin Minimum karena mempunyai pengertian yang sama antara meminimalkan dan memaksimalkan dengan mengalikan  $(-1)$  pada fungsi objektif. Langkah-langkah menyelesaikan masalah kontrol optimal dengan menggunakan Prinsip Pontryagin Maksimum dijelaskan pada Metode Penelitian.



## BAB 3 METODE PENELITIAN

Pada bagian ini diuraikan beberapa metode penelitian yang digunakan untuk mencapai tujuan penelitian.

1. Studi Literatur

Pada tahap ini dikaji hal-hal yang berkaitan dengan proses penelitian, misalnya literatur tentang kasus penyebaran penyakit, model kompartemen, tingkat kejadian nonlinear, sistem *autonomous*, bilangan reproduksi dasar, kestabilan lokal, fungsi Lyapunov, Teorema Poincarè-Dulac, teori kontrol optimal, prinsip Pontryagin Maksimum, dan metode Sweep Maju-Mundur.

2. Konstruksi Model

Pada tahap ini dikonstruksi model penyebaran penyakit menular tipe *SEIT* dengan perbedaan periode *exposed* dan tingkat kejadian tersaturasi. Model dibedakan menjadi tiga kasus, yaitu model I tanpa adanya pengobatan, model II dengan adanya pengobatan pada individu *infective*, dan model III dengan adanya pengobatan pada individu *exposed*.

3. Analisis Kestabilan

Pada tahap ini dilakukan pencarian titik-titik kesetimbangan dan bilangan reproduksi dasar ( $\mathcal{R}_0$ ) dari ketiga model yang telah dikonstruksi, kemudian dilakukan analisis eksistensi dan kestabilan dari titik-titik kesetimbangan tersebut berdasarkan bilangan reproduksi dasar.

4. Analisis Kontrol Optimal

Pada tahap ini dilakukan analisis terhadap model II dan III beserta fungsi objektifnya. Analisis dilakukan untuk mengetahui eksistensi dan membuktikan ketunggalan dari sistem optimal.

5. Penyelesaian Kontrol Optimal

Masalah kontrol optimal diselesaikan dengan menggunakan Prinsip Pontryagin Maksimum. Adapun langkah-langkah penyelesaiannya adalah sebagai berikut.



Diberikan persamaan *plant*  $\frac{d\vec{x}(t)}{dt}$ , yang merepresentasikan sistem persamaan diferensial pada model, fungsi objektif (2.14), dan kondisi batas  $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$  dan  $\vec{x}(t_f) = \vec{x}_f$  bebas. Langkah-langkah penyelesaian Prinsip Pontryagin Maksimum adalah sebagai berikut.

Langkah 1 : membentuk fungsi Pontryagin

$$H(\vec{x}(t), \vec{u}(t), \vec{\lambda}(t), t) = V(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t) + \vec{\lambda}'(t) \vec{f}(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t)$$

Langkah 2 : meminimumkan  $H$  terhadap semua vektor kontrol  $\vec{u}(t)$

$$\left( \frac{\partial H}{\partial \vec{u}} \right)_* = 0$$

dan diperoleh

$$\vec{u}_*(t) = \vec{h}(\vec{x}_*(t), \vec{\lambda}_*(t), t)$$

Langkah 3 : menggunakan hasil dari langkah 2 ke dalam langkah 1 dan menentukan  $H_*$  yang optimal.

$$H_*(t)(\vec{x}_*(t), \vec{h}(\vec{x}_*(t), \vec{\lambda}_*(t), t), \vec{\lambda}_*(t), t) = H_*(\vec{x}_*(t), \vec{\lambda}_*(t), t)$$

Langkah 4 : menyelesaikan sekumpulan  $2n$  persamaan

$$\frac{d\vec{x}_*(t)}{dt} = + \left( \frac{\partial H}{\partial \vec{x}} \right)_*$$

dan

$$\frac{d\vec{\lambda}_*(t)}{dt} = - \left( \frac{\partial H}{\partial \vec{x}} \right)_*$$

dengan kondisi awal  $x_0$  dan kondisi akhir

$$\left[ H_* + \frac{\partial S}{\partial t} \right]_{t_f} \delta t_f + \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial \vec{x}} \right)_* - \vec{\lambda}_*(t) \right]_{t_f}' \delta \vec{x}_f = 0$$

Langkah 5 : untuk memperoleh kontrol optimal, solusi  $\vec{x}_*(t), \vec{\lambda}_*(t)$  dari langkah 4 disubstitusikan ke dalam ekspresi kontrol optimal  $\vec{u}_*$  pada langkah 2.

(Naidu, 2002).

## 6. Simulasi Numerik

Pada tahap ini dibuat program simulasi dari model I, II, dan III dengan menggunakan *software* Matlab. Model I dilakukan simulasi dengan memanfaatkan metode Runge-Kutta Orde Empat untuk memastikan hasil



yang sesuai dengan hasil analisis kestabilan. Model II dan III juga dilakukan simulasi numerik dengan memanfaatkan metode Sweep Maju-Mundur untuk mengetahui dinamika perubahan jumlah populasi sebelum dan sesudah diberikan kontrol optimal pengobatan. Langkah-langkah dalam metode Sweep Maju-Mundur adalah sebagai berikut.

Langkah 1 : Membuat dan menyimpan dugaan awal  $u$ .

Langkah 2 : Menggunakan kondisi awal  $y(0)$  dan nilai dugaan  $u$  untuk menyelesaikan persamaan *state* ( $y$ ) dengan langkah maju metode Runge-Kutta Orde Empat.

Langkah 3 : Menggunakan kondisi transversal  $p(T) = 0$  dan nilai  $u$  dan  $y$  untuk menyelesaikan persamaan *costate* ( $p$ ) dengan langkah mundur metode Runge-Kutta Orde Empat.

Langkah 4 : Memperbarui nilai kontrol  $u$  dengan memasukkan nilai  $y$  dan  $p$  yang baru ke dalam karakteristik dari  $u$ .

Langkah 5 : Memeriksa konvergensi. Jika nilai *error* dari setiap variabel dalam iterasi saat ini dan iterasi sebelumnya sangat kecil maka cetak nilai-nilai saat ini sebagai solusi. Tetapi, jika nilai *error*-nya tidak sangat kecil maka kembali ke langkah 2

(Lenhart & Workman, 2007).

Program simulasi dijalankan dengan variasi nilai parameter. Untuk program simulasi model I dijalankan dengan variasi nilai awal, dan nilai parameter yang memenuhi dua kondisi, yaitu saat  $\mathcal{R}_0 < 1$  dan  $\mathcal{R}_0 > 1$ . Untuk program simulasi model II dan III dijalankan saat  $\mathcal{R}_0 > 1$  untuk mengetahui hasil efektivitas kontrol dalam mereduksi jumlah individu terinfeksi.

#### 7. Analisis Hasil dan Pembahasan

Hasil simulasi yang diperoleh dari *output* program model I dianalisis untuk memastikan hasil simulasi sesuai dengan hasil analisis kestabilan. Sedangkan pada model II dan III, hasil simulasi dianalisis untuk mengetahui efektivitas pengobatan dari model II dan III dalam mengontrol jumlah populasi terinfeksi.

#### 8. Penyusunan Tesis







## BAB 4

### PEMBAHASAN

#### 4.1 Model I

Model I dikonstruksi, kemudian dilakukan pencarian titik-titik kesetimbangan, bilangan reproduksi dasar, dan dilakukan analisis eksistensi serta kestabilan dari titik-titik kesetimbangan tersebut baik secara lokal maupun global.

##### 4.1.1 Konstruksi Model

Model I dikonstruksi dari model *SEIT* tanpa adanya pengobatan. Maksud dari model *SEIT* adalah dalam suatu komunitas terdapat populasi *susceptible*, *exposed*, *infective*, dan *treatment* yang saling berinteraksi satu sama lain, dengan masing-masing populasi diwakili oleh variabel  $S$ ,  $E$ ,  $I$  dan  $T$ . Jumlah individu di keempat populasi berubah setiap waktu, sehingga jumlah individu tiap waktu dapat dinyatakan dengan  $S(t)$ ,  $E(t)$ ,  $I(t)$ , dan  $T(t)$ .

Karena sifatnya temporal, maka perubahan waktu sekarang ( $t_0$ ) dengan waktu yang akan datang ( $t_f$ ) dapat dinyatakan dalam

$$\Delta t = t_f - t_0,$$

dan diperoleh

$$t_f = \Delta t + t_0.$$

Sehingga jumlah individu *susceptible* pada saat  $t_0$  adalah  $S(t_0)$  dan jumlah individu pada saat  $t_f$  adalah  $S(\Delta t + t_0)$ . Dengan demikian diperoleh selisih jumlah individu pada populasi *susceptible* antara waktu  $t_0$  dengan  $t_f$ , yaitu

$$\Delta S(t) = S(\Delta t + t_0) - S(t_0).$$

Oleh sebab itu laju perubahan populasi *susceptible* tiap waktu antara  $t_0$  dan  $t_f$  dapat dinyatakan dalam

$$\frac{dS}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(\Delta t + t_0) - S(t_0)}{\Delta t},$$

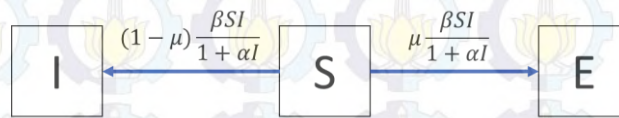
atau dapat ditulis sebagai  $\dot{S}(t)$ . Demikian juga dengan ketiga populasi yang lain diperoleh  $\dot{E}(t)$ ,  $\dot{I}(t)$ , dan  $\dot{T}(t)$ .



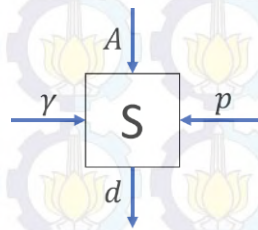
Laju perubahan keempat populasi tersebut dipengaruhi oleh beberapa faktor *input* dan *output*. Jika terdapat *input*, maka jumlah individu dalam suatu populasi semakin bertambah (+), sebaliknya jika terdapat *output*, maka jumlah individu akan berkurang (−). *Input* maupun *output* dapat terjadi akibat kejadian alami yang dialami oleh makhluk hidup seperti kelahiran dan kematian, tindakan manusia seperti pengobatan dan vaksinasi, selain itu juga dapat terjadi akibat berubahnya sifat dari individu itu sendiri. Perubahan sifat dapat terjadi dengan sendirinya sesuai dengan kondisi tubuh individu yang bersangkutan atau bisa juga dipicu oleh pengaruh interaksi dengan individu yang lain. Laju perubahan populasi *susceptible*, *exposed*, *infective*, dan *treatment*, masing-masing dijelaskan sebagai berikut.

a. Laju perubahan populasi *susceptible*.

Konstruksi model populasi *susceptible* diberikan berdasarkan diagram kompartemen pada Gambar 4.1 dan Gambar 4.2.



**Gambar 4.1** Diagram kompartemen interaksi  $S(t)$  dan  $I(t)$  pada model I



**Gambar 4.2** Diagram kompartemen populasi *susceptible* pada model I

Semua individu yang sehat serta individu yang baru lahir mempunyai kemungkinan terinfeksi dan disebut individu *susceptible*. Parameter  $A$  menyatakan jumlah kelahiran tiap waktu. Jika individu pada populasi *susceptible* berinteraksi dengan individu pada populasi *infective*, maka individu *infective* akan menginfeksi individu *susceptible* dengan tingkat kejadian tersaturasi. Dalam tingkat kejadian tersaturasi, tingkat transmisi  $\beta$  mengukur



kekuatan infeksi penyakit dari individu *infective* dan  $\frac{1}{1+\alpha I}$  menyatakan pengaruh hambatan yang ditimbulkan oleh perubahan perilaku individu rentan atau *susceptible* ketika jumlah individu terinfeksi meningkat atau oleh pengaruh kepadatan individu terinfeksi, yaitu

$$g(I) = \frac{\beta I(t)}{1 + \alpha I(t)}.$$

Akibat infeksi tersebut, maka terjadi perubahan sifat pada individu *susceptible*. Adanya variasi virus dan keadaan jasmani yang berbeda dari tiap individu mengakibatkan individu *susceptible* yang terinfeksi dengan tingkat kejadian tersaturasi, yang dinyatakan dengan

$$g(I)S(t) = \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha I(t)},$$

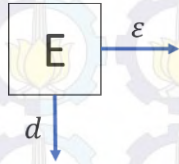
dapat masuk ke dalam populasi *exposed* maupun *infective*, seperti pada Gambar 4.1. Jumlah individu yang keluar dari populasi *susceptible* akibat terinfeksi penyakit harus sama dengan individu yang masuk ke dalam populasi *exposed* dan *infective*, sehingga terdapat parameter  $\mu$  yang merupakan proporsi atau probabilitas dari individu terinfeksi masuk dalam populasi *infective* atau *exposed*. Populasi individu terinfeksi yang masuk kedalam populasi *exposed* sebesar  $\mu$ , dan yang masuk ke dalam populasi *infective* sebesar  $(1 - \mu)$ .

Banyaknya individu *susceptible* bisa berkurang akibat kematian alami, yaitu kematian yang tidak disebabkan oleh infeksi penyakit. Parameter  $d$  menyatakan tingkat kematian alami, sehingga  $-dS$  menyatakan berkurangnya populasi akibat kematian alami dari populasi *susceptible* tiap waktu. Individu *infective* dapat sembuh kembali menjadi individu rentan atau *susceptible* tanpa pengobatan. Tingkat individu *infective* yang kembali rentan dinyatakan dalam parameter  $\gamma$ , sehingga  $\gamma I$  menyatakan bertambahnya populasi akibat individu *infective* sembuh tanpa pengobatan tiap waktu. Individu *treatment* juga dapat kembali menjadi individu *susceptible*. Tingkat individu *treatment* yang kembali rentan dinyatakan dalam parameter  $p$ , sehingga  $pT$  menyatakan bertambahnya populasi akibat individu *treatment* menjadi rentan kembali tiap waktu. Dengan demikian, dapat dibuat model laju perubahan populasi *susceptible* tiap satuan waktu yaitu



$$\dot{S}(t) = A - dS(t) - \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha I(t)} + \gamma I(t) + pT(t). \quad (4.1)$$

b. Laju perubahan populasi *exposed*.



**Gambar 4.3** Diagram kompartemen populasi *exposed* pada model I

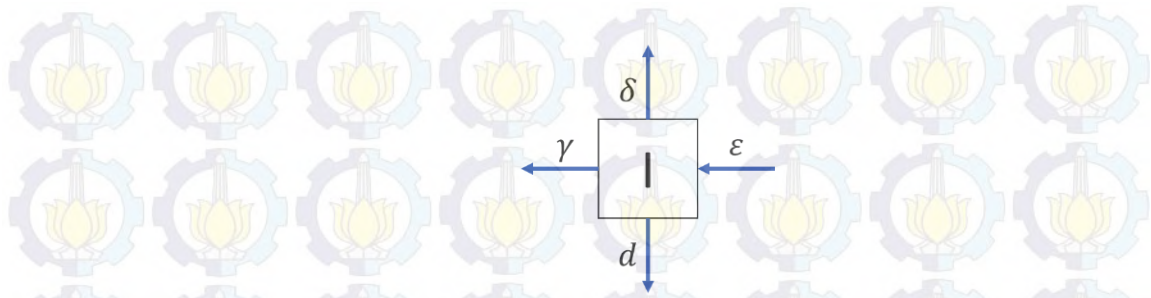
Berkurangnya individu *susceptible* yang melakukan kontak langsung dengan individu *infective* dengan tingkat kejadian tersaturasi menyebabkan bertambahnya individu *exposed*, seperti pada Gambar 4.1. Berdasarkan kontruksi model populasi *exposed* yang diberikan pada Gambar 4.3, banyaknya individu *exposed* bisa berkurang karena kematian alami, yaitu kematian yang tidak disebabkan oleh infeksi penyakit. Dengan demikian,  $-dE$  menyatakan berkurangnya populasi akibat individu *exposed* mengalami kematian alami tiap waktu. Individu *exposed* dapat menjadi individu *infective* dengan tingkat sebesar  $\varepsilon$ , sehingga  $-\varepsilon E$  menyatakan berkurangnya populasi akibat individu *exposed* berubah sifat menjadi *infective* tiap waktu. Dengan demikian, dapat dibuat model laju perubahan populasi *exposed* tiap satuan waktu yaitu

$$\dot{E}(t) = \mu \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha I(t)} - (d + \varepsilon)E(t). \quad (4.2)$$

c. Laju perubahan populasi *infective*.

Individu *susceptible* yang melakukan kontak langsung dengan individu *infective* dengan tingkat kejadian tersaturasi juga menyebabkan bertambahnya individu *infective*, seperti pada Gambar 4.1.





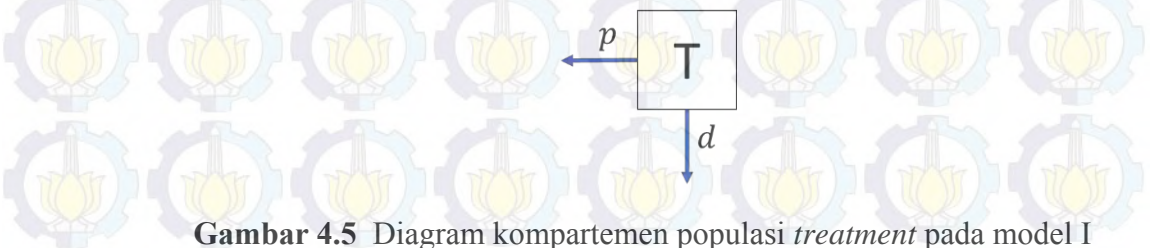
**Gambar 4.4** Diagram kompartemen populasi *infective* pada model I

Berdasarkan Gambar 4.4, individu *exposed* dapat menjadi individu *infective* dengan tingkat sebesar  $\varepsilon$ , sehingga  $\varepsilon E$  menyatakan bertambahnya populasi *infective* akibat individu *exposed* yang berubah sifat menjadi *infective*. Individu *infective* dapat sembuh dan rentan kembali menjadi *susceptible* tanpa dilakukan pengobatan. Parameter  $\gamma$  menyatakan tingkat individu *infective* yang sembuh tanpa pengobatan, sehingga  $-\gamma I$  menyatakan berkurangnya populasi akibat individu *infective* sembuh tanpa pengobatan tiap waktu. Individu *infective* mengalami kematian alami dengan tingkat sebesar  $d$  dan juga kematian akibat penyakit dengan tingkat sebesar  $\delta$ , sehingga  $-(d + \delta)I$  menyatakan berkurangnya populasi akibat individu *infective* yang mengalami kematian tiap waktu. Dengan demikian, dapat dibuat model laju perubahan populasi *infective* per satuan waktu yaitu

$$\dot{I}(t) = (1 - \mu) \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha I(t)} + \varepsilon E(t) - (\gamma + d + \delta)I(t). \quad (4.3)$$

d. Laju perubahan populasi *treatment*.

Karena tidak terdapat pengobatan, maka populasi *treatment* hanya mengalami kematian alami dengan tingkat sebesar  $d$  dan perubahan menjadi individu *susceptible* dengan tingkat sebesar  $p$ , seperti pada Gambar 4.5.



**Gambar 4.5** Diagram kompartemen populasi *treatment* pada model I



Oleh sebab itu,  $-pT$  menyatakan berkurangnya populasi akibat individu *treatment* berubah sifat menjadi rentan kembali tiap waktu, dan  $-dT$  menyatakan berkurangnya populasi akibat individu *treatment* mengalami kematian alami tiap waktu. Dengan demikian, dapat dibuat model laju perubahan populasi *treatment* tiap satuan waktu, yaitu

$$\dot{T}(t) = -(\dot{p} + d)T(t). \quad (4.4)$$

Berikut ini adalah tabel laju perubahan keempat populasi tiap waktu berdasarkan persamaan (4.1), (4.2), (4.3), dan (4.4).

**Tabel 4.1** Laju perubahan populasi pada model I

Faktor	Laju perubahan populasi tiap waktu $\left(\frac{d}{dt}\right)$			
	<i>Susceptible</i>	<i>Exposed</i>	<i>Infective</i>	<i>Treatment</i>
Kelahiran	$A$			
Kematian	$-dS(t)$	$-dE(t)$	$-(d + \delta)I(t)$	$-dT(t)$
Interaksi <i>S</i> dan <i>I</i>	$-\frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha I(t)}$	$\mu \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha I(t)}$	$(1 - \mu) \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha I(t)}$	
Perubahan sifat <i>E</i> menjadi <i>I</i>		$-\varepsilon E(t)$	$\varepsilon E(t)$	
Perubahan sifat <i>I</i> menjadi <i>S</i>	$\gamma I(t)$		$-\gamma I(t)$	
Perubahan sifat <i>T</i> menjadi <i>S</i>	$pT(t)$			$-pT(t)$
Pengobatan				

Berdasarkan Tabel 4.1 diperoleh laju perubahan populasi *susceptible*, *exposed*, *infective*, dan *treatment*. Laju perubahan populasi-populasi tersebut memenuhi sistem persamaan diferensial sebagai berikut.



$$\begin{aligned}
\dot{S}(t) &= A - dS(t) - \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha I(t)} + \gamma I(t) + pT(t) \\
\dot{E}(t) &= \mu \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha I(t)} - (d + \varepsilon)E(t) \\
\dot{I}(t) &= (1 - \mu) \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha I(t)} + \varepsilon E(t) - (d + \gamma + \delta)I(t) \\
\dot{T}(t) &= -(p + d)T(t),
\end{aligned} \tag{4.5}$$

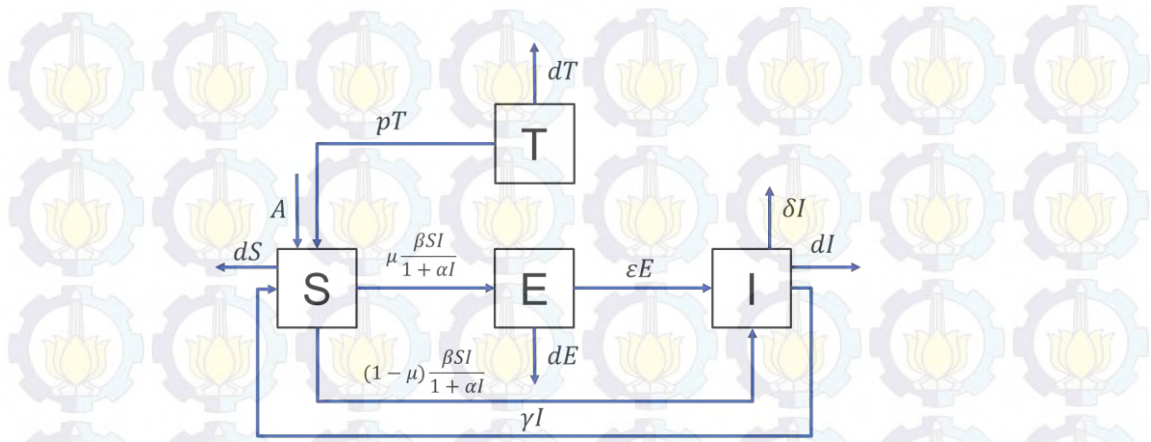
dengan

- $S(t)$  : banyaknya individu *susceptible* tiap waktu  $t$ ,
- $E(t)$  : banyaknya individu *exposed* tiap waktu  $t$ ,
- $I(t)$  : banyaknya individu *infective* tiap waktu  $t$ ,
- $T(t)$  : banyaknya individu *treatment* tiap waktu  $t$ ,
- $A$  : banyaknya kelahiran tiap waktu  $t$ ,
- $d$  : tingkat kematian alami,
- $\delta$  : tingkat kematian akibat penyakit,
- $\gamma$  : tingkat individu *infective* yang kembali rentan,
- $p$  : tingkat individu *treatment* yang kembali rentan,
- $\varepsilon$  : tingkat individu *exposed* yang menjadi *infective*,
- $\mu$  : tingkat individu terinfeksi yang menjadi *exposed*,
- $1 - \mu$  : tingkat individu terinfeksi yang menjadi *infective*,
- $\beta$  : tingkat transmisi,
- $\frac{\beta SI}{1 + \alpha I}$  : tingkat kejadian tersaturasi (*saturated incidence rate*),

dengan  $0 \leq \mu \leq 1$ . Untuk selanjutnya  $S(t), E(t), I(t), T(t)$  cukup ditulis dengan  $S, E, I, T$  tanpa mengubah makna adanya variabel  $t$  yang terkandung di dalamnya.

Berdasarkan Gambar 4.1 sampai 4.5, arus perpindahan materi dari kompartemen-kompartemen dalam model ini secara skematis disajikan dalam Gambar 4.6 berikut.





**Gambar 4.6** Diagram kompartemen model I

Dari sistem persamaan (4.5) diperoleh jumlah total populasi  $N(t)$ , sehingga

$$\dot{N} = \dot{S} + \dot{E} + \dot{T} + \dot{I} = A - dN - \delta I \quad (4.6)$$

Dengan mensubstitusikan  $S = N - E - I - T$  ke persamaan (4.5) dan menyertakan persamaan (4.6) yang menggantikan  $\dot{S}$  diperoleh sistem baru sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \mu \frac{\beta I}{1 + \alpha I} (N - E - I - T) - (d + \varepsilon)E, \\ \dot{I} &= (1 - \mu) \frac{\beta I}{1 + \alpha I} (N - E - I - T) + \varepsilon E - (d + \gamma + \delta)I, \\ \dot{T} &= -(p + d)T \\ \dot{N} &= A - dN - \delta I. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Dari persamaan (4.6), jika populasi terbebas dari penyakit maka diperoleh

$$\dot{N} + dN = A,$$

yang memiliki penyelesaian

$$N(t) = \frac{A}{d} + C e^{-dt}.$$

Dengan mensubstitusikan syarat awal  $N(0) = N_0$  maka diperoleh solusi khusus

$$N(t) = N_0 e^{-dt} + \frac{A}{d} (1 - e^{-dt}).$$

Jika  $t$  membesar maka diperoleh

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \frac{A}{d}.$$



Jadi dapat dijelaskan jumlah populasi dalam jangka waktu yang panjang menuju kapasitas batas yaitu  $A/d$ . sehingga  $N \in [0, A/d]$ . Jadi solusi untuk model (4.7) didefinisikan dalam daerah *invariant* positif  $D$ , dengan

$$D = \left\{ (E, I, T, N) \in \mathbb{R}_+^4 \mid E \geq 0, I \geq 0, T \geq 0, N \geq 0, E + I + T \leq N \leq \frac{A}{d} \right\}.$$

#### 4.1.2 Titik Keseimbangan

Titik kesetimbangan dari sistem persamaan (4.7) dapat diperoleh jika

$\frac{dE}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dT}{dt} = \frac{dN}{dt} = 0$ , sehingga sistem persamaan (4.7) menjadi

$$\mu \frac{\beta I}{1 + \alpha I} (N - E - T - I) - (d + \varepsilon)E = 0 \quad (4.8.a)$$

$$(1 - \mu) \frac{\beta I}{1 + \alpha I} (N - E - T - I) + \varepsilon E - (d + \gamma + \delta)I = 0 \quad (4.8.b)$$

$$-(p + d)T = 0 \quad (4.8.c)$$

$$A - dN - \delta I = 0. \quad (4.8.d)$$

Dari persamaan (4.8.c), terlihat bahwa  $T$  akan selalu bernilai nol, dan jika  $I = 0$  maka  $E = 0$  dan  $N = A/d$ , sehingga diperoleh titik kesetimbangan

$$P_a^0(E^0, I^0, T^0, N^0) = \left( 0, 0, 0, \frac{A}{d} \right).$$

Titik kesetimbangan  $P_a^0(E^0, I^0, T^0, N^0)$  menjelaskan bahwa pada keadaan ini tidak terdapat individu *exposed* dan *infective* dalam populasi, sehingga tidak pernah terjadi kontak atau interaksi antara individu *susceptible* dengan individu *infective*. Dengan kata lain semua individu dalam keadaan sehat. Keadaan seperti ini disebut keadaan bebas penyakit.

Jika  $I \neq 0$ , dari persamaan (4.8.c) diperoleh

$$T = 0, \quad (4.9)$$

dan dari persamaan (4.8.d) diperoleh

$$N = \frac{A - \delta I}{d} = \frac{A}{d} - \frac{\delta I}{d}. \quad (4.10)$$

Dari persamaan (4.8.a) diperoleh

$$\mu \frac{\beta I}{1 + \alpha I} (N - E - T - I) = (d + \varepsilon)E$$



$$\frac{\beta I}{1 + \alpha I}(N - E - T - I) = \frac{(d + \varepsilon)E}{\mu},$$

dan disubstitusikan ke persamaan (4.8.b) diperoleh

$$(1 - \mu) \frac{(d + \varepsilon)E}{\mu} + \varepsilon E - (d + \gamma + \delta)I = 0$$

$$\frac{(d + \varepsilon)E}{\mu} - (d + \varepsilon)E + \varepsilon E - (d + \gamma + \delta)I = 0$$

$$\frac{(d + \varepsilon)E}{\mu} - dE - (d + \gamma + \delta)I = 0$$

$$\frac{(d + \varepsilon)E}{\mu} - dE = (d + \gamma + \delta)I$$

$$\left[ \frac{(d + \varepsilon)}{\mu} - d \right] E = (d + \gamma + \delta)I$$

$$E = \frac{\mu(d + \gamma + \delta)}{d + \varepsilon - \mu d} I$$

$$E = \frac{\mu(d + \gamma + \delta)}{(d + \varepsilon)(1 - \mu) + \mu\varepsilon} I$$

Misalkan  $m = d + \varepsilon, n = d + \gamma + \delta$  maka

$$E = \frac{\mu n}{m(1 - \mu) + \mu\varepsilon} I \quad (4.11)$$

Persamaan (4.9), (4.10), dan (4.11) disubstitusikan kembali ke persamaan (4.8.a),

$$\mu \frac{\beta I}{1 + \alpha I}(N - E - I - T) - mE = 0$$

$$\mu\beta I(N - E - I - T) = (1 + \alpha I)mE$$

$$\mu\beta I \left( \frac{A}{d} - \frac{\delta I}{d} - \frac{\mu n}{m(1 - \mu) + \mu\varepsilon} I - I - 0 \right) = (1 + \alpha I) \frac{\mu mn}{m(1 - \mu) + \mu\varepsilon} I$$

$$= \frac{\mu mn}{m(1 - \mu) + \mu\varepsilon} I + \frac{\mu\alpha mn}{m(1 - \mu) + \mu\varepsilon} I^2$$

$$\mu\beta I \left( \frac{A}{d} - \left( \frac{\delta}{d} + \frac{\mu n}{m(1 - \mu) + \mu\varepsilon} + 1 \right) I \right) = \left( \frac{mn}{m(1 - \mu) + \mu\varepsilon} + \frac{\alpha mn}{m(1 - \mu) + \mu\varepsilon} I \right) \mu I$$

$$\beta \left( \frac{A}{d} - \left( \frac{\delta}{d} + \frac{\mu n}{m(1 - \mu) + \mu\varepsilon} + 1 \right) I \right) = \frac{\left( \frac{mn}{m(1 - \mu) + \mu\varepsilon} + \frac{\alpha mn}{m(1 - \mu) + \mu\varepsilon} I \right) \mu I}{\mu I}$$

$$= \frac{mn}{m(1 - \mu) + \mu\varepsilon} + \frac{\alpha mn}{m(1 - \mu) + \mu\varepsilon} I$$



$$\begin{aligned}
\frac{\beta A}{d} - \beta \left( \frac{\delta}{d} + \frac{\mu n}{m(1-\mu) + \mu \varepsilon} + 1 \right) I &= \frac{mn}{m(1-\mu) + \mu \varepsilon} + \frac{\alpha mn}{m(1-\mu) + \mu \varepsilon} I \\
\left[ \beta \left( \frac{\delta}{d} + \frac{\mu n}{m(1-\mu) + \mu \varepsilon} + 1 \right) + \frac{\alpha mn}{m(1-\mu) + \mu \varepsilon} \right] I &= \frac{\beta A}{d} - \frac{mn}{m(1-\mu) + \mu \varepsilon} \\
\left[ \beta \left( \frac{\delta}{d} + \frac{\mu n}{m(1-\mu) + \mu \varepsilon} + 1 \right) + \frac{\alpha mn}{m(1-\mu) + \mu \varepsilon} \right] I &= \frac{mn}{m(1-\mu) + \mu \varepsilon} \left[ \frac{\beta A(m(1-\mu) + \mu \varepsilon)}{mnd} - 1 \right],
\end{aligned}$$

dan diperoleh

$$I = \frac{\frac{mn}{m(1-\mu) + \mu \varepsilon} \left[ \frac{\beta A(m(1-\mu) + \mu \varepsilon)}{mnd} - 1 \right]}{\beta \left( \frac{\delta}{d} + \frac{\mu n}{m(1-\mu) + \mu \varepsilon} + 1 \right) + \frac{\alpha mn}{m(1-\mu) + \mu \varepsilon}} \quad (4.12)$$

Persamaan (4.9), (4.10), dan (4.11) merupakan titik kesetimbangan kedua

$P_a^*(E^*, I^*, T^*, N^*)$  dengan

$$\begin{aligned}
E^* &= \frac{\mu n}{m(1-\mu) + \mu \varepsilon} I^* \\
I^* &= \frac{\frac{mn}{m(1-\mu) + \mu \varepsilon} \left[ \frac{\beta A(m(1-\mu) + \mu \varepsilon)}{mnd} - 1 \right]}{\beta \left( \frac{\delta}{d} + \frac{\mu n}{m(1-\mu) + \mu \varepsilon} + 1 \right) + \frac{\alpha mn}{m(1-\mu) + \mu \varepsilon}} \\
T^* &= 0 \\
N^* &= \frac{A}{d} - \frac{\delta I^*}{d}
\end{aligned}$$

Titik kesetimbangan  $P_a^*(E^*, I^*, T^*, N^*)$  menjelaskan bahwa pada keadaan ini terdapat individu terinfeksi dalam populasi. Keadaan seperti ini disebut keadaan endemi.

Dari titik kesetimbangan endemi diperoleh bilangan reproduksi dasar

$$\mathcal{R}_0^a = \frac{\beta A(m(1-\mu) + \mu \varepsilon)}{mnd},$$

jika  $\mathcal{R}_0^a < 1$  maka titik kesetimbangan endemi memuat nilai negatif, sehingga hanya terdapat satu titik kesetimbangan yang eksis yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit. Sedangkan jika  $\mathcal{R}_0^a > 1$  maka terdapat dua titik kesetimbangan yang eksis, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemi.



### 4.1.3 Kestabilan Lokal

Untuk mencari kestabilan dari titik kesetimbangan yang diperoleh maka dibentuk matriks Jacobi dari sistem persamaan (4.7), yaitu

$$J = \begin{bmatrix} -\frac{\mu\beta I}{1+\alpha I} - (d+\varepsilon) & \frac{\mu\beta}{(1+\alpha I)^2} [N-E-I(2+\alpha I)-T] & -\frac{\mu\beta I}{1+\alpha I} & \frac{\mu\beta I}{1+\alpha I} \\ -\frac{(1-\mu)\beta I}{1+\alpha I} + \varepsilon & \frac{(1-\mu)\beta}{(1+\alpha I)^2} [N-E-I(2+\alpha I)-T] - (d+\gamma+\delta) & -\frac{(1-\mu)\beta I}{1+\alpha I} & \frac{(1-\mu)\beta I}{1+\alpha I} \\ 0 & 0 & -(p+d) & 0 \\ 0 & -\delta & 0 & -d \end{bmatrix}$$

Titik kesetimbangan bebas penyakit  $P_a^0(E^0, I^0, T^0, N^0) = (0, 0, 0, \frac{A}{d})$  disubstitusikan ke dalam matriks  $J$ , diperoleh matriks

$$J(P_a^0) = \begin{bmatrix} -(d+\varepsilon) & \frac{\mu\beta A}{d} & 0 & 0 \\ \varepsilon & \frac{(1-\mu)\beta A}{d} - (d+\gamma+\delta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(p+d) & 0 \\ 0 & -\delta & 0 & -d \end{bmatrix}$$

$$J(P_a^0) - \lambda I = \begin{bmatrix} -m-\lambda & \frac{\mu\beta A}{d} & 0 & 0 \\ \varepsilon & \frac{(1-\mu)\beta A}{d} - n-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(p+d)-\lambda & 0 \\ 0 & -\delta & 0 & -d-\lambda \end{bmatrix}$$

Nilai eigen matriks diperoleh dari  $|J(P_a^0) - \lambda I| = 0$ , sehingga

$$(-(p+d)-\lambda)(-d-\lambda) \left[ \frac{-(1-\mu)m\beta A}{d} + mn + \lambda m - \frac{\lambda(1-\mu)\beta A}{d} + \lambda n + \lambda^2 - \varepsilon \frac{\mu\beta A}{d} \right] = 0$$

$$(-(p+d)-\lambda)(-d-\lambda) \left[ \lambda^2 + \lambda \left( m+n - \frac{(1-\mu)\beta A}{d} \right) + mn - \frac{(1-\mu)m\beta A}{d} - \varepsilon \frac{\mu\beta A}{d} \right] = 0.$$

Akar-akar persamaan karakteristik yang diperoleh adalah  $\lambda_1 = -(p+d) < 0$ ,  $\lambda_2 = -d < 0$ , serta  $\lambda_3$  dan  $\lambda_4$  yang diperoleh dari persamaan polinomial berikut.

$$\lambda^2 + \lambda \left( m+n - \frac{(1-\mu)\beta A}{d} \right) + mn - \frac{(1-\mu)m\beta A}{d} - \varepsilon \frac{\mu\beta A}{d} = 0 \quad (4.13)$$

Berdasarkan Teorema Vieta (Teorema 2.2), diperoleh

$$\begin{aligned} \lambda_3 + \lambda_4 &= - \left( m+n - \frac{(1-\mu)\beta A}{d} \right) \\ &= \frac{(1-\mu)\beta A}{d} - m - n \end{aligned}$$

dan

$$\lambda_3 \lambda_4 = mn - \frac{(1-\mu)m\beta A}{d} - \varepsilon \frac{\mu\beta A}{d}$$



$$\begin{aligned}
\lambda_3 \lambda_4 &= mn - mn \left( \frac{\beta A(m(1-\mu) + \mu \varepsilon)}{mnd} \right) \\
&= mn - mn(\mathcal{R}_0^a) \\
&= mn(1 - \mathcal{R}_0^a)
\end{aligned}$$

Jika  $\mathcal{R}_0^a < 1$  maka

$$\frac{\beta A(m(1-\mu) + \mu \varepsilon)}{mnd} < 1$$

$$\beta A(m(1-\mu) + \mu \varepsilon) < mnd$$

$$\frac{\beta A}{d} < \frac{mn}{m(1-\mu) + \mu \varepsilon}$$

$$\frac{(1-\mu)\beta A}{d} < \frac{(1-\mu)mn}{m(1-\mu) + \mu \varepsilon},$$

sehingga

$$\lambda_3 + \lambda_4 = \frac{(1-\mu)\beta A}{d} - m - n < \frac{(1-\mu)mn}{m(1-\mu) + \mu \varepsilon} - m - n < 0$$

$$\lambda_3 \lambda_4 = mn(1 - \mathcal{R}_0^a) > 0.$$

Dari  $\lambda_3 + \lambda_4 < 0$  dan  $\lambda_3 \lambda_4 > 0$  terbukti bahwa jika  $\mathcal{R}_0^a < 1$ , maka persamaan (4.13) memiliki akar-akar negatif, sehingga semua nilai eigen bernilai negatif.

Dengan kata lain titik kesetimbangan  $P_a^0$  stabil asimtotik lokal. Jika  $\mathcal{R}_0^a > 1$  maka  $\lambda_3 \lambda_4 < 0$  sehingga persamaan (4.13) memiliki akar yang positif. Karena terdapat nilai eigen yang positif maka terbukti titik kesetimbangan  $P_a^0$  tidak stabil.

Dari persamaan (4.11), yaitu

$$E = \frac{\mu n}{m(1-\mu) + \mu \varepsilon} I$$

disubstitusikan ke persamaan (4.8.a), sehingga diperoleh

$$\mu \frac{\beta I}{1 + \alpha I} (N - E - I - T) = mE$$

$$\frac{\beta}{1 + \alpha I} (N - E - I - T) = \frac{mE}{\mu I}$$

$$= \frac{m}{\mu I} \left( \frac{\mu n}{m(1-\mu) + \mu \varepsilon} I \right)$$

$$= \frac{mn}{m(1-\mu) + \mu \varepsilon}$$

dan



$$\begin{aligned}
& \frac{\mu\beta}{(1+\alpha I)^2} [N - E - I(2 + \alpha I) - T] \\
&= \frac{\mu\beta}{(1+\alpha I)^2} [N - E - I - T] - \frac{\mu\beta I}{(1+\alpha I)^2} (1 + \alpha I) \\
&= \frac{\mu}{(1+\alpha I)} \left( \frac{\beta}{(1+\alpha I)} [N - E - I - T] \right) - \frac{\mu\beta I}{(1+\alpha I)^2} (1 + \alpha I) \\
&= \frac{\mu}{(1+\alpha I)} \left( \frac{mn}{m(1-\mu) + \mu\epsilon} \right) - \frac{\mu\beta I}{(1+\alpha I)} \\
&= \frac{\mu}{(1+\alpha I)} \left( \frac{mn}{m(1-\mu) + \mu\epsilon} - \beta I \right).
\end{aligned}$$

Titik kesetimbangan endemi  $P_a^*(E^*, I^*, T^*, N^*)$  dimasukkan ke matriks Jacobi  $J$  diperoleh matriks

$$J(P_a^*) = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} & j_{14} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} & j_{24} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} & j_{34} \\ j_{41} & j_{42} & j_{43} & j_{44} \end{bmatrix}$$

dengan

$$\begin{aligned}
j_{11} &= -\frac{\mu\beta I^*}{1+\alpha I^*} - m, & j_{12} &= \frac{\mu}{1+\alpha I^*} \left( \frac{mn}{m(1-\mu) + \mu\epsilon} - \beta I^* \right), \\
j_{13} &= -\frac{\mu\beta I^*}{1+\alpha I^*}, & j_{14} &= \frac{\mu\beta I^*}{1+\alpha I^*}, & j_{21} &= -\frac{(1-\mu)\beta I^*}{1+\alpha I^*} + \epsilon, \\
j_{22} &= \frac{1-\mu}{1+\alpha I^*} \left( \frac{mn}{m(1-\mu) + \mu\epsilon} - \beta I^* \right) - n, & j_{23} &= -\frac{(1-\mu)\beta I^*}{1+\alpha I^*}, \\
j_{24} &= \frac{(1-\mu)\beta I^*}{1+\alpha I^*}, & j_{31} &= 0, & j_{32} &= 0, & j_{33} &= -(p+d), \\
j_{34} &= 0, & j_{41} &= 0, & j_{42} &= -\delta, & j_{43} &= 0, & j_{44} &= -d
\end{aligned}$$

Untuk membuktikan bahwa titik kesetimbangan  $P_a^*$  stabil maka harus memenuhi kondisi pada Teorema 2.3. Dari matriks  $J(P_a^*)$  memunculkan dua kasus, yaitu

- 1) Jika  $\frac{mn}{m(1-\mu) + \mu\epsilon} \leq \beta I^*$  maka  $\frac{mn}{\beta(m(1-\mu) + \mu\epsilon)} \leq I^*$ , sehingga  $j_{12}$  negatif. Untuk itu  $j_{21}$  haruslah positif.

$$-\frac{(1-\mu)\beta I^*}{1+\alpha I^*} + \epsilon \geq 0$$

$$\frac{(1-\mu)\beta I^*}{1+\alpha I^*} \leq \epsilon$$

$$(1-\mu)\beta I^* \leq \epsilon(1+\alpha I^*)$$

$$(1-\mu)\beta I^* \leq \epsilon + \epsilon\alpha I^*$$



$$I^*((1-\mu)\beta - \varepsilon\alpha) \leq \varepsilon$$

Terdapat dua kemungkinan,  $(1-\mu)\beta > \varepsilon\alpha$  atau  $(1-\mu)\beta < \varepsilon\alpha$ . Untuk  $(1-\mu)\beta > \varepsilon\alpha$  maka

$$\frac{mn}{\beta(m(1-\mu) + \mu\varepsilon)} \leq I^* \leq \frac{\varepsilon}{(1-\mu)\beta - \varepsilon\alpha},$$

sehingga terbukti  $j_{ii} < 0$  ( $i = 1,2,3,4$ ),  $j_{12}j_{21} \leq 0$ ,  $j_{13}j_{31} = 0$ ,  $j_{14}j_{41} = 0$ ,  $j_{23}j_{32} = 0$ ,  $j_{24}j_{42} < 0$ ,  $j_{34}j_{43} = 0$ . Untuk  $(1-\mu)\beta < \varepsilon\alpha$  maka  $\frac{\varepsilon}{(1-\mu)\beta - \varepsilon\alpha}$

bernilai negatif, sehingga kondisi ini tidak mungkin.

- 2) Jika  $\frac{mn}{m(1-\mu) + \mu\varepsilon} \geq \beta I^*$  maka  $\frac{mn}{\beta(m(1-\mu) + \mu\varepsilon)} \geq I^*$ , sehingga  $j_{12}$  positif. Untuk itu  $j_{21}$  haruslah negatif.

$$-\frac{(1-\mu)\beta I^*}{1 + \alpha I^*} + \varepsilon \leq 0$$

$$\frac{(1-\mu)\beta I^*}{1 + \alpha I^*} \geq \varepsilon$$

$$(1-\mu)\beta I^* \geq \varepsilon(1 + \alpha I^*)$$

$$(1-\mu)\beta I^* \geq \varepsilon + \varepsilon\alpha I^*$$

$$I^*((1-\mu)\beta - \varepsilon\alpha) \geq \varepsilon$$

Terdapat dua kemungkinan,  $(1-\mu)\beta > \varepsilon\alpha$  atau  $(1-\mu)\beta < \varepsilon\alpha$ . Karena  $\varepsilon$  selalu positif maka kondisi yang mungkin adalah  $(1-\mu)\beta > \varepsilon\alpha$ , sehingga

$$\frac{\varepsilon}{(1-\mu)\beta - \varepsilon\alpha} \leq I^* \leq \frac{mn}{\beta(m(1-\mu) + \mu\varepsilon)}.$$

Selain itu, haruslah

$$\frac{1-\mu}{1 + \alpha I^*} \left( \frac{mn}{m(1-\mu) + \mu\varepsilon} - \beta I^* \right) - n < 0$$

$$\frac{1}{1 + \alpha I^*} \left( \frac{(1-\mu)mn}{m(1-\mu) + \mu\varepsilon} - (1-\mu)\beta I^* \right) < n$$

$$\frac{(1-\mu)mn}{m(1-\mu) + \mu\varepsilon} - (1-\mu)\beta I^* < n + n\alpha I^*$$

$$\frac{(1-\mu)mn}{m(1-\mu) + \mu\varepsilon} - n < n\alpha I^* + (1-\mu)\beta I^*$$

$$\frac{(1-\mu)mn}{m(1-\mu) + \mu\varepsilon} - \frac{n(m(1-\mu) + \mu\varepsilon)}{m(1-\mu) + \mu\varepsilon} < (n\alpha + (1-\mu)\beta)I^*$$



$$-\frac{n\mu\varepsilon}{m(1-\mu)+\mu\varepsilon} < (n\alpha + (1-\mu)\beta)I^* \quad (4.14)$$

Karena persamaan (4.14) bernilai benar, maka  $j_{22} < 0$ . Sehingga terbukti bahwa  $j_{ii} < 0$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ),  $j_{12}j_{21} \leq 0$ ,  $j_{13}j_{31} = 0$ ,  $j_{14}j_{41} = 0$ ,  $j_{23}j_{32} = 0$ ,  $j_{24}j_{42} < 0$ ,  $j_{34}j_{43} = 0$ .

Kedua pembuktian tersebut memenuhi Teorema 2.3 kondisi (i), (ii), (iii). Karena  $j_{34}j_{43} = 0$  maka memenuhi kondisi (iv), dan  $\det J(P_a^*) \neq 0$  memenuhi kondisi (v). Sehingga dapat disimpulkan untuk  $\mathcal{R}_0^a > 1$ , maka titik kesetimbangan  $P_a^*$  bersifat stabil asimtotik lokal.

#### 4.1.4 Kestabilan Global

Pada Subbab 4.1.3 telah dianalisis sifat kestabilan di sekitar titik kesetimbangan atau disebut dengan kestabilan lokal. Berdasarkan hasil analisis tersebut, terdapat kemungkinan titik kesetimbangan yang bersifat stabil lokal juga bersifat stabil global.

Analisis kestabilan global dari titik kesetimbangan bebas penyakit  $P_a^0$  dapat dianalisis dengan menggunakan fungsi Lyapunov. Fungsi Lyapunov untuk sistem persamaan (4.7) adalah

$$L = \varepsilon E + mI,$$

selanjutnya akan dibuktikan bahwa

- 1)  $L(\vec{x}^*) = 0$  dan  $L(\vec{x}) > 0$ ,  $\forall \vec{x}, \vec{x}^* \in W$  dan  $\vec{x} \neq \vec{x}^*$ .

Bukti:

$$\begin{aligned} L(P_a^0) &= L\left(0, 0, 0, \frac{A}{d}\right) \\ &= \varepsilon E_0 + mI_0 \\ &= \varepsilon(0) + m(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa  $L(P_a^0) = L(\vec{x}^*) = 0$  dengan  $P_a^0 \in W$ . Kemudian ambil sebarang  $\vec{x} = (E, I, T, N) \in W \setminus \{P_a^0\}$ . Karena parameter  $\varepsilon$  dan  $m$  bernilai positif, dan juga populasi selalu bernilai positif, sehingga

$$L(\vec{x}) = \varepsilon E + mI > L(P_a^0).$$

Jadi terbukti  $L(\vec{x}) > 0$ ,  $\forall \vec{x}, \vec{x}^* \in W$  dan  $\vec{x} \neq \vec{x}^*$ . □



2) Selanjutnya akan dibuktikan bahwa  $L$  memenuhi  $\dot{L}(\vec{x}) \leq 0, \forall \vec{x} \in W$ .

Bukti:

Karena  $L = \varepsilon E + mI$ , maka

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{dL}{dE} \frac{dE}{dt} + \frac{dL}{dI} \frac{dI}{dt} \\ &= \varepsilon \frac{dE}{dt} + m \frac{dI}{dt} \\ &= \varepsilon \left[ \mu \frac{\beta I}{1 + \alpha I} (N - E - I - T) - mE \right] \\ &\quad + m \left[ (1 - \mu) \frac{\beta I}{1 + \alpha I} (N - E - I - T) + \varepsilon E - nI \right] \\ &= \varepsilon \mu \frac{\beta I}{1 + \alpha I} (N - E - I - T) - \varepsilon mE \\ &\quad + m(1 - \mu) \frac{\beta I}{1 + \alpha I} (N - E - I - T) + \varepsilon mE - mnI \\ &= (m(1 - \mu) + \varepsilon \mu) \frac{\beta I}{1 + \alpha I} (N - E - I - T) - mnI. \end{aligned}$$

Karena

$$\begin{aligned} &(m(1 - \mu) + \varepsilon \mu) \frac{\beta I}{1 + \alpha I} (N - E - I - T) - mnI \\ &\leq (m(1 - \mu) + \varepsilon \mu) \beta \frac{A}{d} I - mnI = mnI(\mathcal{R}_0 - 1), \end{aligned}$$

maka untuk  $\mathcal{R}_0^a < 1$  diperoleh  $\dot{L}(\vec{x}) < 0$  pada daerah  $W$ . Selanjutnya  $\dot{L} = 0$  atau

$$(m(1 - \mu) + \varepsilon \mu) \frac{\beta I}{1 + \alpha I} (N - E - I - T) - mnI = 0$$

jika dan hanya jika  $I = 0$ . Sehingga terbukti  $\dot{L}(\vec{x}) \leq 0, \forall \vec{x} \in W$ .  $\square$

Dari kedua pembuktian tersebut, fungsi  $L$  disebut fungsi Lyapunov lemah. Himpunan  $W$  merupakan himpunan *invariant* karena setiap trayektori yang berawal dari sebuah titik dalam himpunan  $W$  akan tetap berada dalam  $W$ . Selanjutnya didefinisikan  $M_W = \{\vec{x} \in W \mid \dot{L}(\vec{x}) = 0\}$  dengan  $\{P_a^0\} \subseteq M_W \subseteq W$ . Menurut Teorema 2.4, himpunan  $\{P_a^0\}$  adalah himpunan *invariant* terbesar karena  $\{P_a^0\}$  merupakan *union* dari himpunan *invariant*  $W$ , sehingga jika  $\mathcal{R}_0^a < 1$  maka titik kesetimbangan bebas penyakit  $P_a^0(0,0,0, A/d)$  bersifat stabil asimtotik global.



Dari persamaan keempat dari sistem (4.7), diperoleh

$$\dot{N} = A - dN - \delta I \leq A - dN$$

Perhatikan bahwa  $I(t) \rightarrow 0$  saat  $t \rightarrow \infty$ , maka  $N(t) \rightarrow A/d$  saat  $t \rightarrow \infty$ . Sehingga limit sistem dari (4.7) adalah

$$\begin{aligned}\dot{E} &= \mu \frac{\beta I}{1 + \alpha I} \left( \frac{A}{d} - E - I - T \right) - mE, \\ \dot{I} &= (1 - \mu) \frac{\beta I}{1 + \alpha I} \left( \frac{A}{d} - E - I - T \right) + \varepsilon E - nI, \\ \dot{T} &= -(p + d)T.\end{aligned}\tag{4.15}$$

Dari sistem (4.15) tersebut dapat ditemukan titik kesetimbangan bebas penyakit

$\bar{P}_a^0(0,0,0)$ . Jika  $\mathcal{R}_0^a > 1$ , maka sistem (4.15) memiliki titik kesetimbangan endemi

$\bar{P}_a^*(\bar{E}^*, \bar{I}^*, \bar{T}^*)$  yang merepresentasikan titik kesetimbangan  $P_a^*$ , dengan

$$\begin{aligned}\bar{E}^* &= \frac{\mu n}{m(1 - \mu) + \mu \varepsilon} I^* \\ \bar{I}^* &= \frac{mn}{m(1 - \mu) + \mu \varepsilon} \left[ \frac{\beta A(m(1 - \mu) + \mu \varepsilon)}{mnd} - 1 \right] \\ &\quad \beta \left( \frac{\mu n}{m(1 - \mu) + \mu \varepsilon} + 1 \right) + \frac{\alpha mn}{m(1 - \mu) + \mu \varepsilon} \\ \bar{T}^* &= 0.\end{aligned}$$

Karena  $\bar{T}^* = 0$ , maka bisa dikatakan titik kesetimbangan  $\bar{P}_a^*$  merupakan titik yang berada pada bidang  $x - y$ . Oleh karena itu, kestabilan global titik kesetimbangan  $\bar{P}_a^*$  dapat dianalisis dengan menggunakan Teorema Poincaré – Dulac.

Menurut fungsi Dulac

$$B = \frac{1}{I},$$

dan sistem (4.15) yang dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned}f &= \mu \frac{\beta I}{1 + \alpha I} \left( \frac{A}{d} - E - I - T \right) - mE, \\ g &= (1 - \mu) \frac{\beta I}{1 + \alpha I} \left( \frac{A}{d} - E - I - T \right) + \varepsilon E - nI,\end{aligned}$$

maka diperoleh

$$\begin{aligned}Bf &= \mu \frac{\beta}{1 + \alpha I} \left( \frac{A}{d} - E - I - T \right) - \frac{mE}{I} \\ Bg &= (1 - \mu) \frac{\beta}{1 + \alpha I} \left( \frac{A}{d} - E - I - T \right) + \frac{\varepsilon E}{I} - n\end{aligned}\tag{4.16}$$



fungsi  $f$  dan  $g$  masing-masing adalah ruas kanan persamaan pertama dan kedua dari sistem persamaan (4.15).

Pada uraian berikut ini ditunjukkan bahwa  $\frac{\partial(Bf)}{\partial(E)} + \frac{\partial(Bg)}{\partial(I)} \neq 0$  dan tidak terjadi perubahan tanda pada  $\frac{\partial(Bf)}{\partial(E)} + \frac{\partial(Bg)}{\partial(I)}$ . Dari (4.16) diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{\partial(Bf)}{\partial(E)} &= -\mu \frac{\beta}{1 + \alpha I} - \frac{m}{I} \\ \frac{\partial(Bg)}{\partial(I)} &= \frac{(1 - \mu)\beta}{(1 + \alpha I)^2} \left[ -\alpha \left( \frac{A}{d} - E - I - T \right) - (1 + \alpha I) \right] - \frac{\varepsilon E}{I^2},\end{aligned}$$

dan

$$\frac{\partial(Bf)}{\partial(E)} + \frac{\partial(Bg)}{\partial(I)} = -\mu \frac{\beta}{1 + \alpha I} - \frac{m}{I} + \frac{(1 - \mu)\beta}{(1 + \alpha I)^2} \left[ -\alpha \left( \frac{A}{d} - E - I - T \right) - (1 + \alpha I) \right] - \frac{\varepsilon E}{I^2} \neq 0$$

Karena  $(1 - \mu) > 0$  dan  $\left( \frac{A}{d} - E - I - T \right) > 0$ , jelas bahwa  $\frac{\partial(Bf)}{\partial(E)} + \frac{\partial(Bg)}{\partial(I)} < 0$ .

Berdasarkan Teorema Poincaré – Dulac dapat dikatakan bahwa pada perilaku solusi sistem persamaan (4.15) tidak terdapat orbit periodik, sehingga titik kesetimbangan  $\bar{P}_a^*(\bar{E}^*, \bar{I}^*, \bar{T}^*)$  bersifat stabil asimtotik global. Ketika  $t \rightarrow \infty$ ,  $P_a^*(E^*, I^*, T^*, N^*) \rightarrow P_a^*(E^*, I^*, T^*, A/d)$ , sehingga stabilitas  $P_a^*(E^*, I^*, T^*, A/d)$  ekuivalen dengan  $\bar{P}_a^*(\bar{E}^*, \bar{I}^*, \bar{T}^*)$ . Karena  $\bar{P}_a^*(\bar{E}^*, \bar{I}^*, \bar{T}^*)$  bersifat stabil asimtotik global, maka titik kesetimbangan  $P_a^*(E^*, I^*, T^*, N^*)$  juga bersifat stabil asimtotik global.

Dari analisis kestabilan lokal dan kestabilan global, diketahui bahwa

$$\mathcal{R}_0^a = \frac{\beta A(m(1 - \mu) + \mu\varepsilon)}{mnd}$$

merupakan ambang batas bifurkasi. Saat  $\mathcal{R}_0^a > 1$ , terdapat dua titik kesetimbangan, titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat tidak stabil, sedangkan titik kesetimbangan endemi bersifat stabil lokal dan global. Saat  $\mathcal{R}_0^a = 1$ , kedua titik kesetimbangan tersebut menjadi satu. Kemudian saat  $\mathcal{R}_0^a < 1$ , hanya terdapat satu titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit yang berubah sifat menjadi stabil lokal dan global, sedangkan titik kesetimbangan endemi menjadi tidak eksis.



## 4.2 Model II

Model II dikonstruksi, kemudian dilakukan pencarian titik-titik kesetimbangan, bilangan reproduksi dasar, pengecekan eksistensi serta kestabilan dari titik-titik kesetimbangan tersebut, kemudian dilakukan pengecekan eksistensi dan penyelesaian kontrol optimal, serta ketunggalan dari sistem optimal tersebut.

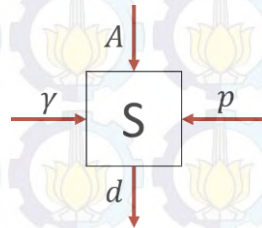
### 4.2.1 Konstruksi Model

Model II dikonstruksi dari model *SEIT* dengan pengobatan pada populasi *infective*. Laju perubahan populasi *susceptible*, *exposed*, *infective*, dan *treatment* pada model II adalah sebagai berikut.

a. Laju perubahan populasi *susceptible*.



**Gambar 4.7** Diagram kompartemen interaksi  $S(t)$  dan  $I(t)$  pada model II



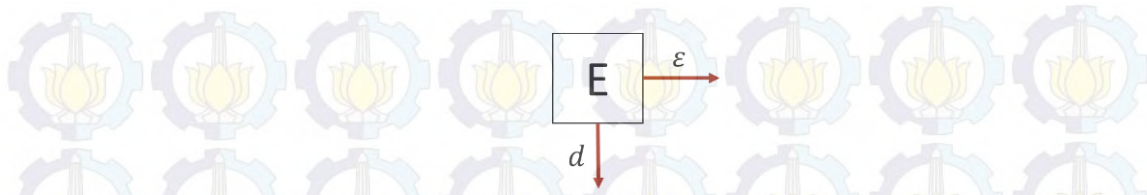
**Gambar 4.8** Diagram kompartemen populasi *susceptible* pada model II

Berdasarkan diagram kompartemen pada Gambar 4.7 dan 4.8, model laju perubahan populasi *susceptible* tiap satuan waktu sama seperti pada persamaan (4.1), yaitu

$$\dot{S}(t) = A - dS(t) - \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha I(t)} + \gamma I(t) + pT(t). \quad (4.17)$$

b. Laju perubahan populasi *exposed*.



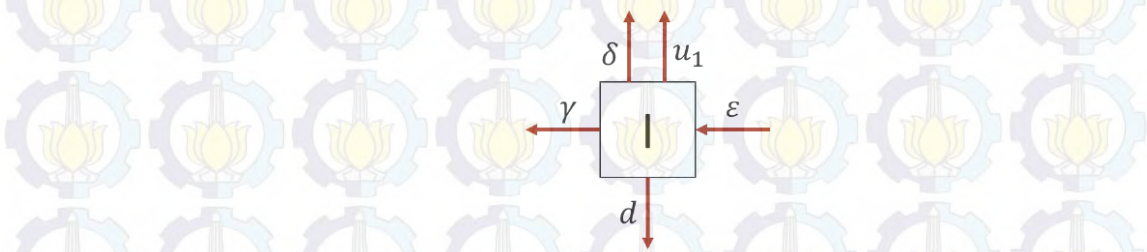


**Gambar 4.9** Diagram kompartemen populasi *exposed* pada model II

Berdasarkan diagram kompartemen pada Gambar 4.7 dan 4.9, model laju perubahan populasi *exposed* tiap satuan waktu sama seperti pada persamaan (4.2), yaitu

$$\dot{E}(t) = \mu \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha I(t)} - (d + \varepsilon)E(t). \quad (4.18)$$

c. Laju perubahan populasi *infective*.



**Gambar 4.10** Diagram kompartemen populasi *infective* pada model II

Adanya pengobatan pada individu *infective* mengakibatkan adanya individu *infective* yang sembuh dengan tingkat pengobatan  $u_1$ , sehingga  $-u_1I$  menyatakan berkurangnya populasi akibat individu *infective* sembuh dengan pengobatan tiap waktu, seperti pada Gambar 4.10. Dengan demikian persamaan (4.3) menjadi

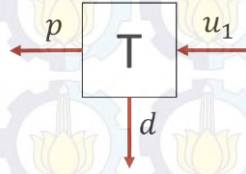
$$\dot{I}(t) = (1 - \mu) \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha I(t)} + \varepsilon E(t) - (d + \gamma + \delta + u_1)I(t). \quad (4.19)$$

d. Laju perubahan populasi *treatment*.

Adanya individu *infective* yang diberi pengobatan mengakibatkan bertambahnya populasi *treatment* dengan tingkat sebesar  $u_1$ , sehingga  $u_1I$



menyatakan bertambahnya populasi akibat individu *infective* sembuh dengan pengobatan tiap waktu, seperti pada Gambar 4.11.



**Gambar 4.11** Diagram kompartemen populasi *treatment* pada model II

Dengan demikian persamaan (4.4) menjadi

$$\dot{T}(t) = u_1 I(t) - (p + d)T(t). \quad (4.20)$$

Berikut ini adalah tabel laju perubahan keempat populasi tiap waktu berdasarkan persamaan (4.17), (4.18), (4.19), dan (4.20).

**Tabel 4.2** Laju perubahan populasi pada model II

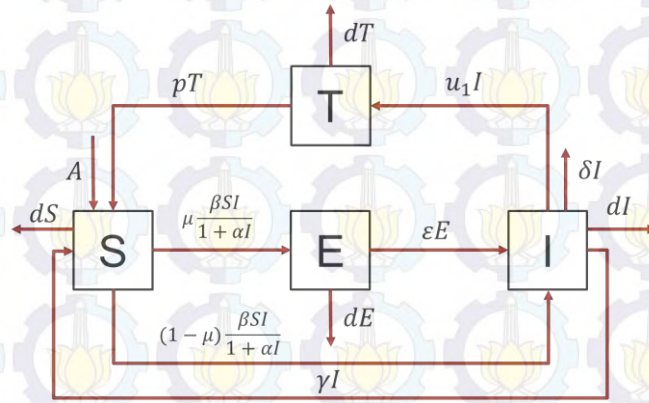
Faktor	Laju perubahan populasi tiap waktu $\left(\frac{d}{dt}\right)$			
	<i>Susceptible</i>	<i>Exposed</i>	<i>Infective</i>	<i>Treatment</i>
Kelahiran	$A$			
Kematian	$-dS(t)$	$-dE(t)$	$-(d + \delta)I(t)$	$-dT(t)$
Interaksi $S$ dan $I$	$-\frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha I(t)}$	$\mu \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha I(t)}$	$(1 - \mu) \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha I(t)}$	
Perubahan sifat $E$ menjadi $I$		$-\varepsilon E(t)$	$\varepsilon E(t)$	
Perubahan sifat $I$ menjadi $S$	$\gamma I(t)$		$-\gamma I(t)$	
Perubahan sifat $T$ menjadi $S$	$pT(t)$			$-pT(t)$
Pengobatan			$-u_1 I(t)$	$u_1 I(t)$



Dari Tabel 4.2 diperoleh laju perubahan populasi *susceptible*, *exposed*, *infective* dan *treatment* seperti berikut.

$$\begin{aligned}\dot{S}(t) &= A - dS(t) - \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha I(t)} + \gamma I(t) + pT(t) \\ \dot{E}(t) &= \mu \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha I(t)} - (d + \varepsilon)E(t) \\ \dot{I}(t) &= (1 - \mu) \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha I(t)} + \varepsilon E(t) - (d + \gamma + \delta + u_1)I(t) \\ \dot{T}(t) &= u_1 I(t) - (p + d)T(t),\end{aligned}\tag{4.21}$$

dengan  $u_1$  adalah tingkat pengobatan populasi *infective*. Diagram kompartemen dari sistem persamaan (4.21) secara skematis disajikan dalam Gambar 4.12 berikut.



**Gambar 4.12** Diagram kompartemen model II

Model II yang dinyatakan dalam sistem persamaan (4.21) diubah menjadi bentuk *EITN* seperti pada model I, dengan  $N$  menyatakan jumlah total individu. Dengan mensubstitusikan  $S = N - E - I - T$  ke sistem persamaan (4.21), diperoleh

$$\begin{aligned}\dot{E} &= \mu \frac{\beta I}{1 + \alpha I} (N - E - I - T) - (d + \varepsilon)E \\ \dot{I} &= (1 - \mu) \frac{\beta I}{1 + \alpha I} (N - E - I - T) + \varepsilon E - (d + \gamma + \delta + u_1)I \\ \dot{T} &= u_1 I - (p + d)T \\ \dot{N} &= A - dN - \delta I,\end{aligned}\tag{4.22}$$

dengan  $D$  adalah daerah *invariant* positif dari model sistem persamaan (4.22).

$$D = \left\{ (E, I, T, N) \in \mathbb{R}_+^4 \mid E \geq 0, I \geq 0, T \geq 0, N \geq 0, E + I + T \leq N \leq \frac{A}{d} \right\}.$$



#### 4.2.2 Titik Keseimbangan

Model II yang dinyatakan dalam sistem persamaan (4.22) identik dengan model I yang dinyatakan dalam sistem persamaan (4.7). Perbedaannya yaitu adanya faktor pengobatan  $u_1 I$  yang terdapat pada laju perubahan populasi *infective* dan *treatment*, sehingga jika  $I = 0$  diperoleh titik keseimbangan bebas penyakit

$$P_b^0(E^0, I^0, T^0, N^0) = \left(0, 0, 0, \frac{A}{d}\right).$$

Jika  $I \neq 0$  maka

$$\begin{aligned} u_1 I - (p + d)T &= 0 \\ (p + d)T &= u_1 I \\ T &= \frac{u_1 I}{p + d}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Pada pembahasan titik keseimbangan model I dimisalkan  $m = d + \varepsilon$  dan  $n = d + \gamma + \delta$ , sehingga diperoleh pemisalan  $d + \gamma + \delta + u_1 = n + u_1$ . Berdasarkan persamaan (4.10), (4.11), (4.12), dan (4.23) diperoleh titik keseimbangan endemi untuk model II yaitu  $P_b^*(E^*, I^*, T^*, N^*)$  dengan

$$\begin{aligned} E^* &= \frac{\mu(n + u_1)}{m(1 - \mu) + \mu\varepsilon} I^*, \\ I^* &= \frac{\frac{m(n + u_1)}{m(1 - \mu) + \mu\varepsilon} \left[ \frac{\beta A(m(1 - \mu) + \mu\varepsilon)}{m(n + u_1)d} - 1 \right]}{\beta \left( \frac{\delta}{d} + \frac{\mu(n + u_1)}{m(1 - \mu) + \mu\varepsilon} + 1 \right) + \frac{\alpha m(n + u_1)}{m(1 - \mu) + \mu\varepsilon}}, \\ T^* &= \frac{u_1 I^*}{p + d}, \\ N^* &= \frac{A}{d} - \frac{\delta I^*}{d}. \end{aligned}$$

Dari titik keseimbangan endemi diperoleh bilangan reproduksi dasar

$$\mathcal{R}_0^b = \frac{\beta A(m(1 - \mu) + \mu\varepsilon)}{m(n + u_1)d}, \quad (4.24)$$

sehingga jika  $\mathcal{R}_0^b < 1$  maka hanya terdapat satu titik keseimbangan yang eksis yaitu titik keseimbangan bebas penyakit. Sedangkan jika  $\mathcal{R}_0^b > 1$  maka terdapat dua titik keseimbangan yang eksis, yaitu titik keseimbangan bebas penyakit dan titik keseimbangan endemi.



### 4.2.3 Kestabilan Lokal

Dari persamaan (4.24), berdasarkan analisis kestabilan titik kesetimbangan, jika  $\mathcal{R}_0^b = 1$  diperoleh

$$1 = \frac{\beta A(m(1 - \mu) + \mu \varepsilon)}{m(n + u_1)d}$$

$$m(n + u_1)d = \beta A(m(1 - \mu) + \mu \varepsilon)$$

$$mnd + mu_1d = \beta A(m(1 - \mu) + \mu \varepsilon)$$

$$mu_1d = \beta A(m(1 - \mu) + \mu \varepsilon) - mnd$$

$$u_1 = \frac{\beta A(m(1 - \mu) + \mu \varepsilon) - mnd}{md},$$

yang merupakan ambang batas bifurkasi. Jika  $\mathcal{R}_0^b > 1$  atau parameter pengobatan  $u_1 < \frac{\beta A(m(1 - \mu) + \mu \varepsilon) - mnd}{md}$ , maka titik kesetimbangan endemi stabil sedangkan titik kesetimbangan bebas penyakit tidak stabil. Sebaliknya jika  $\mathcal{R}_0^b < 1$  atau  $u_1 > \frac{\beta A(m(1 - \mu) + \mu \varepsilon) - mnd}{md}$ , maka hanya terdapat satu titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit yang bersifat stabil. Dari penjelasan tersebut diketahui bahwa semakin bertambahnya  $u_1$  maka semakin mendekati kondisi bebas penyakit. Dengan kata lain, semakin banyak diberikan pengobatan pada populasi *infective* maka semakin meminimalisir penyebaran penyakit di suatu wilayah.

### 4.2.4 Eksistensi Kontrol Optimal

Pada bagian ini dilakukan identifikasi terhadap eksistensi kontrol optimal pada model II. Permasalahan pada persamaan (2.14) dan sistem persamaan (4.22) harus memenuhi Teorema 2.7 yang membahas tentang eksistensi kontrol optimal. Berikut ini adalah pembuktian model II berdasarkan Teorema 2.7.

- (i) Himpunan kontrol  $\mathcal{U}$  tidak kosong.

Secara umum, sistem didesain dengan adanya suatu kontrol supaya dapat mencapai tujuan yang diinginkan (fungsi objektif). Akan tetapi, jika kontrol atau kontrol itu kosong maka tidak ada tindakan pada sistem tersebut, dengan kata lain tujuan yang diinginkan sulit dicapai. Dengan kontradiksi, andaikan terdapat fungsi objektif



$$\text{maks } J(u_j) = \int_{t_0}^{t_f} \left( I(t) + \frac{C}{2} u_j^2(t) \right) dt,$$

artinya tujuan dari penelitian ini adalah memaksimalkan jumlah individu *infective*, dan biaya pengobatan yang diperlukan dalam mengobati individu terinfeksi. Dengan semakin meningkatnya populasi *infective* berarti semakin banyaknya individu yang terinfeksi penyakit, sehingga tidak perlu adanya usaha pengobatan dalam menyembuhkan penyakit. Hal tersebut kontradiksi karena pada interval waktu  $[0, t_f]$  terdapat tindakan pengendalian. Dengan demikian terbukti, seharusnya fungsi kontrol tidak kosong sedemikian hingga

$$\min J(u_j) = \int_{t_0}^{t_f} \left( I(t) + \frac{C}{2} u_j^2(t) \right) dt,$$

yang menggambarkan tujuan *plant*, yaitu mengontrol populasi *infective* dengan memberikan pengobatan pada individu terinfeksi.  $\square$

(ii) Himpunan kontrol  $\mathcal{U}$  konveks dan tertutup.

Akibat (i) maka dapat dijamin bahwa kontrol tidak kosong, sehingga dapat dilakukan analisis mengenai sifat dari kontrol tersebut yaitu konveks dan tertutup.

a. Himpunan kontrol  $\mathcal{U}$  konveks

Dengan mengambil sebarang  $u \in \mathcal{U}$  dan  $u' \in \mathcal{U}$ , serta berdasarkan definisi akan dibuktikan  $z = \theta u + (1 - \theta)u' \in \mathcal{U}$ , untuk semua  $\theta \in [0, 1]$ .

Berdasarkan  $\theta u \leq \theta$  dan  $(1 - \theta)u' \leq (1 - \theta)$ , maka

$$\theta u + (1 - \theta)u' \leq \theta + (1 - \theta) = 1.$$

Karena  $0 \leq \theta u + (1 - \theta)u' \leq 1$  untuk semua  $u \in \mathcal{U}$  dan  $\theta \in [0, 1]$ , maka dapat ditunjukkan bahwa  $\mathcal{U}$  konveks.  $\square$

b. Himpunan kontrol  $\mathcal{U}$  tertutup

Menurut definisi  $0 \leq a \leq u \leq b \leq 0.9$ , maka dengan mengambil sebarang  $u \notin [a, b]$ , sehingga  $u < a$  atau  $u > b$ . Jika  $u < a$ , maka  $\epsilon_u = |u - a|$  sehingga  $[a, b] \cap V_\epsilon(u) = \emptyset$ . Jika  $u > b$ , maka  $\epsilon_u = |u - b|$  sehingga  $[a, b] \cap V_\epsilon(u) = \emptyset$ . Dengan demikian dapat ditunjukkan bahwa  $a \leq u \leq b$  dengan  $0 \leq a \leq u \leq b \leq 0.9$  untuk semua  $u \in \mathcal{U}$ . Jadi terbukti bahwa  $\mathcal{U}$  tertutup.  $\square$



(iii) Persamaan ruas kanan (*Right Hand Side*) dari sistem dinamik kontinu terbatas oleh fungsi linear pada *state* dan kontrol optimal.

Berdasarkan sistem (4.22), persamaan ruas kanan (*Right Hand Side*) dari sistem tersebut dapat dinyatakan

$$\begin{bmatrix} -\frac{\mu\beta I}{1+\alpha I} - (d+\varepsilon) & -\frac{\mu\beta I}{1+\alpha I} & -\frac{\mu\beta I}{1+\alpha I} & \frac{\mu\beta I}{1+\alpha I} \\ -(1-\mu)\frac{\mu\beta I}{1+\alpha I} + \varepsilon & -(1-\mu)\frac{\mu\beta I}{1+\alpha I} - (d+\gamma+\delta+u_1) & -(1-\mu)\frac{\mu\beta I}{1+\alpha I} & (1-\mu)\frac{\mu\beta I}{1+\alpha I} \\ 0 & 0 & -(p+d) & 0 \\ 0 & -\delta & 0 & -d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ I \\ T \\ N \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_1 I \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu\frac{\beta I}{1+\alpha I}(N-E-I-T) - (d+\varepsilon)E \\ (1-\mu)\frac{\beta I}{1+\alpha I}(N-E-I-T) + \varepsilon E - (d+\gamma+\delta+u_1)I \\ -(p+d)T \\ -dN - \delta I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_1 I \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ A \end{bmatrix},$$

sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} \mu\frac{\beta IN}{1+\alpha I} \\ (1-\mu)\frac{\beta IN}{1+\alpha I} + \varepsilon E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu\frac{\beta I}{1+\alpha I}(E+I+T) + (d+\varepsilon)E \\ (1-\mu)\frac{\beta I}{1+\alpha I}(E+I+T) + (d+\gamma+\delta+u_1)I \\ (p+d)T \\ dN + \delta I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_1 I \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ A \end{bmatrix} \\ \leq \begin{bmatrix} \mu\frac{\beta IN}{1+\alpha I} \\ (1-\mu)\frac{\beta IN}{1+\alpha I} + \varepsilon E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_1 I \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ A \end{bmatrix}$$

Karena nilai parameter dan nilai tiap variabel selalu positif untuk setiap  $t$ , maka dijamin ruas kiri sistem persamaan diatas selalu lebih kecil atau sama dengan ruas

kanan. Berdasarkan definisi bahwa  $\left| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right| = \begin{pmatrix} |a| \\ |b| \end{pmatrix}$  adalah nilai *absolute* dari tiap elemen dalam matriks, diperoleh

$$\begin{bmatrix} \mu\frac{\beta IN}{1+\alpha I} \\ (1-\mu)\frac{\beta IN}{1+\alpha I} + \varepsilon E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_1 I \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ A \end{bmatrix} \leq \left\| \begin{bmatrix} \mu\frac{\beta IN}{1+\alpha I} \\ (1-\mu)\frac{\beta IN}{1+\alpha I} + \varepsilon E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| + \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_1 I \\ 0 \end{bmatrix} \right\| + \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ A \end{bmatrix} \right\|.$$

Sehingga didapatkan

$$\dot{E} = f_1(E, I, T, N, u_1) \leq \left| \mu\frac{\beta IN}{1+\alpha I} \right|$$



$$\dot{I} = f_2(E, I, T, N, u_1) \leq \left| (1 - \mu) \frac{\beta I N}{1 + \alpha I} + \varepsilon E \right| \leq \left| (1 - \mu) \frac{\beta I N}{1 + \alpha I} \right| + |\varepsilon E|$$

$$\dot{T} = f_3(E, I, T, N, u_1) \leq |u_1 I|$$

$$\dot{N} = f_4(E, I, T, N, u_1) \leq |A|.$$

Berdasarkan laju perubahan populasi *exposed* dan *infective*, terdapat  $0 \leq \mu \leq 1$  yang merupakan probabilitas individu yang terinfeksi masuk populasi *infective* atau *exposed*, dan terdapat  $\frac{\beta I}{1 + \alpha I}$  yang merupakan tingkat kejadian infeksi tersaturasi. Dari situ diperoleh tiga kemungkinan, yaitu

1. jika  $\mu_{maks} N \left( \frac{\beta I}{1 + \alpha I} \right)_{maks}$ , maka individu menuju ke  $E$ ,
2. jika  $\mu_{min} N \left( \frac{\beta I}{1 + \alpha I} \right)_{maks}$ , maka individu menuju ke  $I$ , dan
3. jika  $\mu_{maks} N \left( \frac{\beta I}{1 + \alpha I} \right)_{min}$  atau  $\mu_{min} N \left( \frac{\beta I}{1 + \alpha I} \right)_{min}$ , maka individu tetap berada di  $S$ .

Berdasarkan ketiga kemungkinan tersebut, laju perubahan populasi *exposed* ditentukan oleh  $\mu_{maks} N \left( \frac{\beta I}{1 + \alpha I} \right)_{maks}$ . Mengingat  $N(t)$  terbatas pada  $t \in [0, t_f]$ , maka saat  $t = t_f$  diperoleh

$$\mu_{maks} N \left( \frac{\beta I}{1 + \alpha I} \right)_{maks} \leq \mu_{maks} N_{maks} \left( \frac{\beta I}{1 + \alpha I} \right)_{maks}.$$

Dengan menganggap  $M_1 = \mu_{maks} N_{maks} \left( \frac{\beta I}{1 + \alpha I} \right)_{maks}$  maka terdapat suatu konstanta  $M_1$  sedemikian sehingga  $f_1(E, I, T, N, u_1) \leq M_1$ , artinya ruas kanan persamaan  $\dot{E}$  terbatas.

Untuk laju perubahan populasi *infective* ditentukan oleh  $\mu_{min} N \left( \frac{\beta I}{1 + \alpha I} \right)_{maks}$ , sehingga pada saat  $t = t_f$  diperoleh

$$\mu_{min} N \left( \frac{\beta I}{1 + \alpha I} \right)_{maks} + \varepsilon E \leq \mu_{min} N_{maks} \left( \frac{\beta I}{1 + \alpha I} \right)_{maks} + \varepsilon E_{maks}$$

Dengan menganggap  $M_2 = \mu_{min} N_{maks} \left( \frac{\beta I}{1 + \alpha I} \right)_{maks} + \varepsilon E_{maks}$  maka terdapat konstanta  $M_2$  sedemikian sehingga  $f_2(E, I, T, N, u_1) \leq M_2$ , dengan kata lain ruas kanan persamaan  $\dot{I}$  terbatas.

Untuk laju perubahan populasi *treatment*, saat  $t = t_f$  diperoleh  $u_1 I \leq u_1 I_{maks}$ . Berdasarkan asumsi bahwa fungsi kontrol dalam keadaan terbatas



maka terdapat bilangan positif  $m$  sedemikian sehingga diperoleh  $|u_1| \leq m$  dan  $u_1 I_{maks} \leq m I_{maks}$ . Dengan menganggap  $M_3 = m I_{maks}$  maka terdapat konstanta  $M_3$  sedemikian sehingga  $f_3(E, I, T, N, u_1) \leq M_3$ , dengan kata lain ruas kanan persamaan  $\dot{T}$  terbatas.

Proses kelahiran dapat terjadi dari individu yang berada pada populasi  $S, E, I$ , atau  $T$ , sehingga tingkat kelahiran  $A$  dapat dinyatakan dalam bentuk  $bN$  dengan  $b$  adalah tingkat kelahiran dari tiap-tiap populasi. Pada saat  $t = t_f$  diperoleh  $bN \leq bN_{maks}$ . Dengan menganggap  $M_4 = bN_{maks}$  maka terdapat konstanta  $M_4$  sedemikian sehingga  $f_4(E, I, T, N, u_1) \leq M_4$ , artinya ruas kanan persamaan  $\dot{N}$  terbatas.

Berdasarkan pembuktian diatas, didapatkan

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -\frac{\mu\beta I}{1+\alpha I} - (d+\varepsilon) & -\frac{\mu\beta I}{1+\alpha I} & -\frac{\mu\beta I}{1+\alpha I} & \frac{\mu\beta I}{1+\alpha I} \\ -(1-\mu)\frac{\mu\beta I}{1+\alpha I} + \varepsilon & -(1-\mu)\frac{\mu\beta I}{1+\alpha I} - (d+\gamma+\delta+u_1) & -(1-\mu)\frac{\mu\beta I}{1+\alpha I} & (1-\mu)\frac{\mu\beta I}{1+\alpha I} \\ 0 & 0 & -(p+d) & 0 \\ 0 & -\delta & 0 & -d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ I \\ T \\ N \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_1 I \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ A \end{bmatrix} \leq \left\| \begin{bmatrix} \mu \frac{\beta IN}{1+\alpha I} \\ (1-\mu)\frac{\beta IN}{1+\alpha I} + \varepsilon E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_1 I \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ A \end{bmatrix} \leq \vec{M} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

terbukti bahwa persamaan ruas kanan dari sistem (4.22) terbatas oleh fungsi linear pada *state* dan kontrol optimal.  $\square$

(iv) Integrand dari fungsi objektif konveks pada  $\mathcal{U}$ .

Ambil sebarang  $u_j, v_j \in [a, b], j = 1, 2$  untuk setiap  $0 \leq \theta \leq 1$  dengan

$$J(u_j) = I(t) + \frac{C}{2} u_j^2(t). \text{ Akan dibuktikan bahwa}$$

$$J((1-\theta)u_j + \theta v_j) \leq (1-\theta)J(u_j) + \theta J(v_j),$$

untuk

$$J((1-\theta)u_j + \theta v_j) = I(t) + \frac{C}{2} ((1-\theta)u_j + \theta v_j)^2(t),$$

dan

$$(1-\theta)J(u_j) + \theta J(v_j) = (1-\theta) \left( I(t) + \frac{C}{2} u_j^2(t) \right) + \theta \left( I(t) + \frac{C}{2} v_j^2(t) \right).$$



Sehingga dapat dibuktikan

$$\begin{aligned}
(1-\theta) \left( I(t) + \frac{C}{2} u_j^2(t) \right) + \theta \left( I(t) + \frac{C}{2} v_j^2(t) \right) &\geq I(t) + \frac{C}{2} \left( (1-\theta)u_j + \theta v_j \right)^2(t) \\
(1-\theta) \left( I(t) + \frac{C}{2} u_j^2(t) \right) + \theta \left( I(t) + \frac{C}{2} v_j^2(t) \right) - I(t) - \frac{C}{2} \left( (1-\theta)u_j + \theta v_j \right)^2(t) &\geq 0 \\
(1-\theta) \frac{C}{2} u_j^2(t) + \theta \frac{C}{2} v_j^2(t) - \frac{C}{2} \left( (1-\theta)^2 u_j^2 + 2\theta(1-\theta)u_j v_j + \theta^2 v_j^2 \right)(t) &\geq 0 \\
\frac{C}{2} u_j^2(t) \left( (1-\theta) - (1-\theta)^2 \right) + \frac{C}{2} v_j^2(t) (\theta - \theta^2) - \frac{C}{2} \left( 2\theta(1-\theta)u_j(t)v_j(t) \right) &\geq 0 \\
\frac{C}{2} u_j^2(t) \theta(1-\theta) + \frac{C}{2} v_j^2(t) \theta(1-\theta) - \frac{C}{2} \left( 2\theta(1-\theta)u_j(t)v_j(t) \right) &\geq 0 \\
\frac{C}{2} \left( u_j^2 \theta(1-\theta) - 2\theta(1-\theta)u_j v_j + v_j^2 \theta(1-\theta) \right)(t) &\geq 0,
\end{aligned}$$

dapat ditulis dalam bentuk

$$\frac{C}{2} \left( \sqrt{\theta(1-\theta)} u_j - \sqrt{\theta(1-\theta)} v_j \right)^2(t) \geq 0.$$

Jadi terbukti integrand pada fungsi objektif konveks pada  $\mathcal{U}$ .  $\square$

(v) Integrand dari fungsi objektif terbatas.

Misalkan terdapat  $m > \frac{C}{2}$  dan mengingat  $I$  terbatas pada  $[0, t_f]$  sedemikian sehingga  $I \leq I_{maks}$ . Oleh sebab itu

$$I(t) + \frac{C}{2} u_j^2(t) \leq I_{maks} + m u_j^2(t),$$

dengan  $I_{maks}$  tergantung pada batas atas dari  $I(t)$ . Akibat fungsi kontrol terletak pada interval  $0 \leq u_j \leq 0.9$  maka  $u_j^2 = |u_j|^2$ . Sehingga diperoleh

$$I(t) + \frac{C}{2} u_j^2(t) \leq I_{maks} + m |u_j(t)|^2,$$

Dengan menganggap  $M = I_{maks} + m |u_j(t)|^2$ , terdapat konstanta  $M$  sedemikian sehingga  $I(t) + \frac{C}{2} u_j^2(t) \leq M$ . Terbukti integrand pada fungsi objektif terbatas.  $\square$

Berdasarkan pembuktian tersebut, terbukti bahwa kontrol optimal pada model II dapat dijamin eksistensinya karena terdapat kontrol optimal yang dapat meminimalkan fungsi objektif yang diinginkan.



#### 4.2.5 Penyelesaian Kontrol Optimal

Langkah pertama yang dilakukan untuk mendapatkan kontrol optimal adalah membentuk fungsi Hamilton. Berdasarkan fungsi objektif (2.14), maka fungsi Hamiltonnya adalah sebagai berikut.

$$H(E, I, T, N, u_1, \lambda) = I(t) + \frac{C}{2} u_1^2(t) + \sum_{i=1}^4 \lambda_i f_i,$$

dengan  $\lambda_i$  dan  $f_i$  berturut-turut menyatakan variabel *costate* dan ruas kanan dari sistem persamaan (4.22). Parameter  $u_1$  sebagai kontrol pengobatan dinyatakan dalam  $u_1(t)$  karena nilainya berubah terhadap waktu. Fungsi Hamilton dapat ditulis kembali sebagai berikut.

$$\begin{aligned} H(E, I, T, N, u_1, \lambda) &= I(t) + \frac{C}{2} u_1^2(t) \\ &+ \lambda_1(t) \left( \mu \frac{\beta I(t)}{1 + \alpha I(t)} (N(t) - E(t) - I(t) - T(t)) - (d + \varepsilon) E(t) \right) \\ &+ \lambda_2(t) \left( (1 - \mu) \frac{\beta I(t)}{1 + \alpha I(t)} (N(t) - E(t) - I(t) - T(t)) + \varepsilon E(t) \right. \\ &\quad \left. - (d + \gamma + \delta + u_1(t)) I(t) \right) + \lambda_3(t) (u_1(t) I(t) - (p + d) T(t)) \\ &+ \lambda_4(t) (A - d N(t) - \delta I(t)) \end{aligned}$$

Menurut Prinsip Pontryagin, fungsi Hamilton mencapai solusi optimal jika berlaku persamaan *state* dan *costate* serta kondisi stasioner.

##### 1) Persamaan *state*

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_1} = \dot{E}(t) = \mu \frac{\beta I(t)}{1 + \alpha I(t)} (N(t) - E(t) - I(t) - T(t)) - (d + \varepsilon) E(t)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \lambda_2} = \dot{I}(t) &= (1 - \mu) \frac{\beta I(t)}{1 + \alpha I(t)} (N(t) - E(t) - I(t) - T(t)) + \varepsilon E(t) \\ &\quad - (d + \gamma + \delta + u_1(t)) I(t) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_3} = \dot{T}(t) = u_1(t) I(t) - (p + d) T(t)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_4} = \dot{N}(t) = A - d N(t) - \delta I(t).$$



2) Persamaan *costate*

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial E}$$

$$= -\left[ -\lambda_1(t)\mu \frac{\beta I(t)}{1+\alpha I(t)} - \lambda_1(t)(d+\varepsilon) - \lambda_2(1-\mu) \frac{\beta I(t)}{1+\alpha I(t)} + \lambda_2(t)\varepsilon \right]$$

$$= (\lambda_1(t)\mu + \lambda_2(t)(1-\mu)) \frac{\beta I(t)}{1+\alpha I(t)} + (\lambda_1(t) - \lambda_2(t))\varepsilon + \lambda_1(t)d$$

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial I}$$

$$= -\left[ 1 + \lambda_1(t)\mu \frac{\beta(N(t) - E(t) - T(t) - 2I(t) - \alpha I^2(t))}{(1+\alpha I(t))^2} \right. \\ \left. + \lambda_2(t)(1-\mu) \frac{\beta(N(t) - E(t) - T(t) - 2I(t) - \alpha I^2(t))}{(1+\alpha I(t))^2} \right. \\ \left. - \lambda_2(t)(d+\gamma+\delta+u_1(t)) + \lambda_3(t)u_1(t) - \lambda_4(t)\delta \right]$$

$$= -(\lambda_1(t)\mu + \lambda_2(t)(1-\mu)) \frac{\beta(N(t) - E(t) - T(t) - 2I(t) - \alpha I^2(t))}{(1+\alpha I(t))^2}$$

$$+ \lambda_2(t)(d+\gamma) + (\lambda_2(t) - \lambda_3(t))u_1(t) + (\lambda_2(t) + \lambda_4(t))\delta - 1$$

$$\frac{d\lambda_3}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial T}$$

$$= -\left[ -\lambda_1(t)\mu \frac{\beta I(t)}{1+\alpha I(t)} - \lambda_2(1-\mu) \frac{\beta I(t)}{1+\alpha I(t)} - \lambda_3(t)(p+d) \right]$$

$$= (\lambda_1(t)\mu + \lambda_2(1-\mu)) \frac{\beta I(t)}{1+\alpha I(t)} + \lambda_3(t)(p+d)$$

$$\frac{d\lambda_4}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial N}$$

$$= -\left[ \lambda_1(t)\mu \frac{\beta I(t)}{1+\alpha I(t)} + \lambda_2(1-\mu) \frac{\beta I(t)}{1+\alpha I(t)} - \lambda_4(t)d \right]$$

$$= -(\lambda_1(t)\mu + \lambda_2(1-\mu)) \frac{\beta I(t)}{1+\alpha I(t)} + \lambda_4(t)d$$

3) Kondisi stasioner

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = 0,$$

$$Cu_1(t) - \lambda_2(t)I(t) + \lambda_3(t)I(t) = 0,$$



$$Cu_1(t) = (\lambda_2(t) - \lambda_3(t))I(t),$$

$$\bar{u}_1(t) = \frac{(\lambda_2(t) - \lambda_3(t))I_*(t)}{C}$$

Karena  $0 \leq u_1(t) \leq 0.9$  sehingga

$$u_{1*}(t) = \begin{cases} 0 & , \bar{u}_1(t) \leq 0 \\ \bar{u}_1(t) & , 0 < \bar{u}_1(t) < 0.9 \\ 0.9 & , \bar{u}_1(t) \geq 0.9 \end{cases}$$

Jadi, kontrol optimal  $u_{1*}(t)$  dicirikan sebagai

$$u_{1*}(t) = \min(0.9, \max(0, \bar{u}_1(t)))$$

$$= \min\left(0.9, \max\left(0, \frac{(\lambda_2(t) - \lambda_3(t))I_*(t)}{C}\right)\right)$$

Sistem optimal didapat dengan memasukkan kontrol optimal  $u_{1*}(t)$  ke sistem persamaan *state* dan *costate* tersebut, sehingga diperoleh sistem optimal berikut.

$$\frac{dE_*(t)}{dt} = \mu \frac{\beta I_*(t)}{1 + \alpha I_*(t)} (N_*(t) - E_*(t) - I_*(t) - T_*(t)) - (d + \varepsilon)E_*(t) \quad (4.25.a)$$

$$\frac{dI_*(t)}{dt} = (1 - \mu) \frac{\beta I_*(t)}{1 + \alpha I_*(t)} (N_*(t) - E_*(t) - I_*(t) - T_*(t)) + \varepsilon E_*(t) - (d + \gamma + \delta + u_{1*}(t))I_*(t) \quad (4.25.b)$$

$$\frac{dT_*(t)}{dt} = u_{1*}(t)I_*(t) - (p + d)T_*(t) \quad (4.25.c)$$

$$\frac{dN_*(t)}{dt} = A - dN_*(t) - \delta I_*(t) \quad (4.25.d)$$

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = (\lambda_1(t)\mu + \lambda_2(t)(1 - \mu)) \frac{\beta I_*(t)}{1 + \alpha I_*(t)} + (\lambda_1(t) - \lambda_2(t))\varepsilon + \lambda_1(t)d \quad (4.25.e)$$

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = -(\lambda_1(t)\mu + \lambda_2(t)(1 - \mu)) \frac{\beta (N_*(t) - E_*(t) - T_*(t) - 2I_*(t) - \alpha I_*(t)^2)}{(1 + \alpha I_*(t))^2} + \lambda_2(t)(d + \gamma) + (\lambda_2(t) - \lambda_3(t))u_1(t) + (\lambda_2(t) + \lambda_4(t))\delta - 1 \quad (4.25.f)$$

$$\frac{d\lambda_3}{dt} = (\lambda_1(t)\mu + \lambda_2(t)(1 - \mu)) \frac{\beta I_*(t)}{1 + \alpha I_*(t)} + \lambda_3(t)(p + d) \quad (4.25.g)$$

$$\frac{d\lambda_4}{dt} = -(\lambda_1(t)\mu + \lambda_2(t)(1 - \mu)) \frac{\beta I_*(t)}{1 + \alpha I_*(t)} + \lambda_4(t)d \quad (4.25.h)$$



dengan kondisi batas yaitu  $E(0) = E_0, I(0) = I_0, T(0) = T_0, N(0) = N_0,$   
 $\lambda_1(t_f) = 0, \lambda_2(t_f) = 0, \lambda_3(t_f) = 0,$  dan  $\lambda_4(t_f) = 0.$

#### 4.2.6 Ketunggalan Sistem Optimal

Misalkan  $(E, I, T, N, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$  dan  $(\bar{E}, \bar{I}, \bar{T}, \bar{N}, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3, \bar{\lambda}_4)$  adalah dua solusi yang berbeda dari sistem persamaan diferensial (4.25). Diberikan  $E = e^{\lambda t}v, I = e^{\lambda t}q, T = e^{\lambda t}r, N = e^{\lambda t}s, \lambda_1 = e^{-\lambda t}w, \lambda_2 = e^{-\lambda t}x, \lambda_3 = e^{-\lambda t}y, \lambda_4 = e^{-\lambda t}z,$  dan juga  $\bar{E} = e^{\lambda t}\bar{v}, \bar{I} = e^{\lambda t}\bar{q}, \bar{T} = e^{\lambda t}\bar{r}, \bar{N} = e^{\lambda t}\bar{s}, \bar{\lambda}_1 = e^{-\lambda t}\bar{w}, \bar{\lambda}_2 = e^{-\lambda t}\bar{x}, \bar{\lambda}_3 = e^{-\lambda t}\bar{y}, \bar{\lambda}_4 = e^{-\lambda t}\bar{z},$  dengan  $\lambda > 0.$  Selanjutnya didapatkan bentuk kontrol optimal

$$u_{1*}(t) = \min \left( 0.9, \max \left( 0, \frac{(x-y)q}{C} \right) \right)$$

dan

$$\bar{u}_{1*}(t) = \min \left( 0.9, \max \left( 0, \frac{(\bar{x}-\bar{y})\bar{q}}{C} \right) \right).$$

Menggunakan Lemma 2.1 diperoleh

$$\begin{aligned} |u_{1*}(t) - \bar{u}_{1*}(t)| &= \left| \min \left( 0.9, \max \left( 0, \frac{(x-y)q}{C} \right) \right) - \min \left( 0.9, \max \left( 0, \frac{(\bar{x}-\bar{y})\bar{q}}{C} \right) \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{C} |(x-y)q - (\bar{x}-\bar{y})\bar{q}| \leq \frac{1}{C} |xq - \bar{x}\bar{q}|. \end{aligned}$$

Untuk solusi  $(E, I, T, N, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4),$  dengan mensubstitusikan  $E = e^{\lambda t}v,$   
 $I = e^{\lambda t}q, T = e^{\lambda t}r, N = e^{\lambda t}s$  pada persamaan (4.25.a) diperoleh

$$\frac{de^{\lambda t}v}{dt} = \mu \frac{\beta e^{\lambda t}q}{1 + \alpha e^{\lambda t}q} (e^{\lambda t}s - e^{\lambda t}v - e^{\lambda t}q - e^{\lambda t}r) - (d + \varepsilon)e^{\lambda t}v,$$

sehingga

$$\begin{aligned} e^{\lambda t} \frac{dv}{dt} + v \frac{de^{\lambda t}}{dt} &= \mu \frac{\beta e^{\lambda t}q}{1 + \alpha e^{\lambda t}q} (e^{\lambda t}s - e^{\lambda t}v - e^{\lambda t}q - e^{\lambda t}r) - (d + \varepsilon)e^{\lambda t}v \\ e^{\lambda t}(\dot{v} + \lambda v) &= \mu \frac{\beta e^{\lambda t}q}{1 + \alpha e^{\lambda t}q} (s - v - q - r)e^{\lambda t} - (d + \varepsilon)e^{\lambda t}v. \end{aligned}$$

Kedua ruas dibagi dengan  $e^{\lambda t}$  sehingga dapat diperoleh

$$\dot{v} + \lambda v = \mu \frac{\beta e^{\lambda t}q}{1 + \alpha e^{\lambda t}q} (s - v - q - r) - (d + \varepsilon)v.$$

Dengan cara yang sama didapatkan



$$\dot{q} + \lambda q = (1 - \mu) \frac{\beta e^{\lambda t} q}{1 + \alpha e^{\lambda t} q} (s - v - q - r) + \varepsilon v$$

$$- \left( d + \gamma + \delta + \min \left( 0.9, \max \left( 0, \frac{(x - y)q}{C} \right) \right) \right) q$$

$$\dot{r} + \lambda r = \min \left( 0.9, \max \left( 0, \frac{(x - y)q}{C} \right) \right) q - (p + d)r$$

$$\dot{s} + \lambda s = e^{-\lambda t} A - ds - \delta q,$$

dengan mensubstitusikan  $\lambda_1 = e^{-\lambda t} w, \lambda_2 = e^{-\lambda t} x, \lambda_3 = e^{-\lambda t} y, \lambda_4 = e^{-\lambda t} z$  diperoleh

$$-\dot{w} + \lambda w = -(w\mu + x(1 - \mu)) \frac{\beta e^{\lambda t} q}{1 + \alpha e^{\lambda t} q} - (w - x)\varepsilon - wd$$

$$-\dot{x} + \lambda x = (w\mu + x(1 - \mu)) \frac{\beta e^{\lambda t} (s - v - r - 2q - \alpha e^{\lambda t} q^2)}{(1 + \alpha e^{\lambda t} q)^2} - x(d + \gamma)$$

$$- (x - y) \left[ \min \left( 0.9, \max \left( 0, \frac{(x - y)q}{C} \right) \right) \right] - (x + z)\delta + e^{\lambda t}$$

$$-\dot{y} + \lambda y = -(w\mu + x(1 - \mu)) \frac{\beta e^{\lambda t} q}{1 + \alpha e^{\lambda t} q} - y(p + d)$$

$$-\dot{z} + \lambda z = (w\mu + x(1 - \mu)) \frac{\beta e^{\lambda t} q}{1 + \alpha e^{\lambda t} q} - dz$$

Untuk  $(\bar{E}, \bar{I}, \bar{T}, \bar{N}, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3, \bar{\lambda}_4)$ , dengan substitusi  $\bar{E} = e^{\lambda t} \bar{v}, \bar{I} = e^{\lambda t} \bar{q}, \bar{T} = e^{\lambda t} \bar{r}, \bar{N} = e^{\lambda t} \bar{s}, \bar{\lambda}_1 = e^{-\lambda t} \bar{w}, \bar{\lambda}_2 = e^{-\lambda t} \bar{x}, \bar{\lambda}_3 = e^{-\lambda t} \bar{y}, \bar{\lambda}_4 = e^{-\lambda t} \bar{z}$  diperoleh

$$\dot{\bar{v}} + \lambda \bar{v} = \mu \frac{\beta e^{\lambda t} \bar{q}}{1 + \alpha e^{\lambda t} \bar{q}} (\bar{s} - \bar{v} - \bar{q} - \bar{r}) - (d + \varepsilon) \bar{v}$$

$$\dot{\bar{q}} + \lambda \bar{q} = (1 - \mu) \frac{\beta e^{\lambda t} \bar{q}}{1 + \alpha e^{\lambda t} \bar{q}} (\bar{s} - \bar{v} - \bar{q} - \bar{r}) + \varepsilon \bar{v}$$

$$- \left( d + \gamma + \delta + \min \left( 0.9, \max \left( 0, \frac{(\bar{x} - \bar{y})\bar{q}}{C} \right) \right) \right) \bar{q}$$

$$\dot{\bar{r}} + \lambda \bar{r} = \min \left( 0.9, \max \left( 0, \frac{(\bar{x} - \bar{y})\bar{q}}{C} \right) \right) \bar{q} - (p + d) \bar{r}$$

$$\dot{\bar{s}} + \lambda \bar{s} = e^{-\lambda t} A - d\bar{s} - \delta \bar{q}$$

$$-\dot{\bar{w}} + \lambda \bar{w} = -(\bar{w}\mu + \bar{x}(1 - \mu)) \frac{\beta e^{\lambda t} \bar{q}}{1 + \alpha e^{\lambda t} \bar{q}} - (\bar{w} - \bar{x})\varepsilon - \bar{w}d$$



$$\begin{aligned}
-\dot{\bar{x}} + \lambda \bar{x} &= (\bar{w}\mu + \bar{x}(1 - \mu)) \frac{\beta e^{\lambda t} (\bar{s} - \bar{v} - \bar{r} - 2\bar{q} - \alpha e^{\lambda t} \bar{q}^2)}{(1 + \alpha e^{\lambda t} \bar{q})^2} - (d + \gamma) \bar{x} \\
&\quad - (\bar{x} - \bar{y}) \left[ \min \left( 0.9, \max \left( 0, \frac{(\bar{x} - \bar{y}) \bar{q}}{C} \right) \right) \right] - (\bar{x} + \bar{z}) \delta + e^{\lambda t} \\
-\dot{\bar{y}} + \lambda \bar{y} &= -(\bar{w}\mu + \bar{x}(1 - \mu)) \frac{\beta e^{\lambda t} \bar{q}}{1 + \alpha e^{\lambda t} \bar{q}} - \bar{y}(p + d) \\
-\dot{\bar{z}} + \lambda \bar{z} &= (\bar{w}\mu + \bar{x}(1 - \mu)) \frac{\beta e^{\lambda t} \bar{q}}{1 + \alpha e^{\lambda t} \bar{q}} - d \bar{z}.
\end{aligned}$$

Dengan mengurangi persamaan  $E$  dengan  $\bar{E}$  diperoleh

$$\begin{aligned}
(\dot{v} + \lambda v) - (\dot{\bar{v}} + \lambda \bar{v}) &= (\dot{v} - \dot{\bar{v}}) + \lambda(v - \bar{v}) \\
&= \left( \mu \frac{\beta e^{\lambda t} q}{1 + \alpha e^{\lambda t} q} (s + v + q + r) - \mu \frac{\beta e^{\lambda t} \bar{q}}{1 + \alpha e^{\lambda t} \bar{q}} (\bar{s} + \bar{v} + \bar{q} + \bar{r}) \right) \\
&\quad + ((d + \varepsilon)v - (d + \varepsilon)\bar{v}).
\end{aligned}$$

Kedua ruas dikalikan dengan  $(v - \bar{v})$  sehingga menjadi

$$\begin{aligned}
&(\dot{v} - \dot{\bar{v}})(v - \bar{v}) + \lambda(v - \bar{v})^2 \\
&= \left( \mu \frac{\beta e^{\lambda t} q}{1 + \alpha e^{\lambda t} q} (s + v + q + r) - \mu \frac{\beta e^{\lambda t} \bar{q}}{1 + \alpha e^{\lambda t} \bar{q}} (\bar{s} + \bar{v} + \bar{q} + \bar{r}) \right) (v - \bar{v}) \\
&\quad - \bar{v}) + ((d + \varepsilon)v - (d + \varepsilon)\bar{v})(v - \bar{v}).
\end{aligned}$$

Kedua ruas diintegrasikan dari 0 sampai  $t_f$

$$\begin{aligned}
&\int_0^{t_f} ((\dot{v} - \dot{\bar{v}})(v - \bar{v}) + \lambda(v - \bar{v})^2) dt \\
&= \int_0^{t_f} \left( \left( \mu \frac{\beta e^{\lambda t} q}{1 + \alpha e^{\lambda t} q} (s + v + q + r) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \mu \frac{\beta e^{\lambda t} \bar{q}}{1 + \alpha e^{\lambda t} \bar{q}} (\bar{s} + \bar{v} + \bar{q} + \bar{r}) \right) (v - \bar{v}) \right. \\
&\quad \left. + ((d + \varepsilon)v - (d + \varepsilon)\bar{v})(v - \bar{v}) \right) dt
\end{aligned}$$

Dengan teknik integral parsial diperoleh

$$\int_0^{t_f} (\dot{v} - \dot{\bar{v}})(v - \bar{v}) dt = (v^2 - 2\bar{v}v + \bar{v}^2) \Big|_0^{t_f} - \int_0^{t_f} (\dot{v} - \dot{\bar{v}})(v - \bar{v}) dt$$



$$2 \int_0^{t_f} (\dot{v} - \dot{\bar{v}})(v - \bar{v}) dt = (v^2 - 2\bar{v}v + \bar{v}^2)|_0^{t_f}$$

$$\int_0^{t_f} (\dot{v} - \dot{\bar{v}})(v - \bar{v}) dt = \frac{1}{2}(v - \bar{v})^2|_0^{t_f}$$

Karena  $E(0) = \bar{E}(0)$ , maka  $v(0) = \bar{v}(0)$ . Sehingga

$$\int_0^{t_f} (\dot{v} - \dot{\bar{v}})(v - \bar{v}) dt = \frac{1}{2}(v - \bar{v})^2(t_f),$$

dengan demikian

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(v - \bar{v})^2(t_f) + \lambda \int_0^{t_f} (v - \bar{v})^2 dt \\ &= \int_0^{t_f} \left( \left( \mu \frac{\beta e^{\lambda t} q}{1 + \alpha e^{\lambda t} q} (s + v + q + r) - \mu \frac{\beta e^{\lambda t} \bar{q}}{1 + \alpha e^{\lambda t} \bar{q}} (\bar{s} + \bar{v} + \bar{q} + \bar{r}) \right) (v - \bar{v}) \right. \\ & \quad \left. + ((d + \varepsilon)v - (d + \varepsilon)\bar{v})(v - \bar{v}) \right) dt. \end{aligned}$$

Mengingat lama pengobatan dibatasi pada selang waktu tertentu, maka solusi yang dihasilkan terbatas, berarti terdapat suatu konstanta  $C_1$  dan  $C_2$  sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_f} \left( \mu \frac{\beta e^{\lambda t} q}{1 + \alpha e^{\lambda t} q} (s + v + q + r) - \mu \frac{\beta e^{\lambda t} \bar{q}}{1 + \alpha e^{\lambda t} \bar{q}} (\bar{s} + \bar{v} + \bar{q} + \bar{r}) \right) (v - \bar{v}) dt \\ & \leq C_1 e^{\lambda t} \int_0^{t_f} ((s - \bar{s})^2 + (v - \bar{v})^2 + (q - \bar{q})^2 + (r - \bar{r})^2) dt \end{aligned}$$

dan

$$\int_0^{t_f} ((d + \varepsilon)v - (d + \varepsilon)\bar{v})(v - \bar{v}) dt \leq C_2 \int_0^{t_f} (v - \bar{v})^2 dt,$$

sehingga

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(v - \bar{v})^2(t_f) + \lambda \int_0^{t_f} (v - \bar{v})^2 dt \\ & \leq C_1 e^{\lambda t} \int_0^{t_f} ((s - \bar{s})^2 + (v - \bar{v})^2 + (q - \bar{q})^2 + (r - \bar{r})^2) dt \\ & \quad + C_2 \int_0^{t_f} (v - \bar{v})^2 dt. \end{aligned}$$



Konstanta  $C_1$  dan  $C_2$  bergantung pada koefisien dan batas pada *state* dan *costate*. Dengan cara yang sama, untuk persamaan (4.25.b) sampai (4.25.h) diperoleh estimasi yang ditampilkan selengkapnya pada Lampiran 3. Gabungan dari delapan estimasi tersebut didapatkan

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(v - \bar{v})^2(t_f) + \frac{1}{2}(q - \bar{q})^2(t_f) + \frac{1}{2}(r - \bar{r})^2(t_f) + \frac{1}{2}(s - \bar{s})^2(t_f) \\ & + \frac{1}{2}(w - \bar{w})^2(0) + \frac{1}{2}(x - \bar{x})^2(0) + \frac{1}{2}(y - \bar{y})^2(0) \\ & + \frac{1}{2}(z - \bar{z})^2(0) \\ & + \lambda \int_0^{t_f} [(v - \bar{v})^2 + (q - \bar{q})^2 + (r - \bar{r})^2 + (s - \bar{s})^2 + (w - \bar{w})^2 \\ & + (x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 + (z - \bar{z})^2] dt \\ & \leq (\tilde{C}_1 e^{\lambda t_f} \\ & + \tilde{C}_2) \int_0^{t_f} [(v - \bar{v})^2 + (q - \bar{q})^2 + (r - \bar{r})^2 + (s - \bar{s})^2 \\ & + (w - \bar{w})^2 + (x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 + (z - \bar{z})^2] dt \end{aligned}$$

Dari persamaan di atas dapat disimpulkan bahwa

$$(\lambda - \tilde{C}_1 e^{\lambda t_f} - \tilde{C}_2) \int_0^{t_f} [(v - \bar{v})^2 + (q - \bar{q})^2 + (r - \bar{r})^2 + (s - \bar{s})^2 + (w - \bar{w})^2 \\ + (x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 + (z - \bar{z})^2] dt \leq 0$$

dengan  $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$  bergantung pada semua koefisien dan batas pada  $v, q, r, s, w, x, y, z$ .

Jika memilih  $\lambda$  sedemikian sehingga  $\lambda - \tilde{C}_1 e^{\lambda t_f} - \tilde{C}_2 > 0$ , maka haruslah

$$\int_0^{t_f} [(v - \bar{v})^2 + (q - \bar{q})^2 + (r - \bar{r})^2 + (s - \bar{s})^2 + (w - \bar{w})^2 + (x - \bar{x})^2 \\ + (y - \bar{y})^2 + (z - \bar{z})^2] dt = 0$$

Sehingga

$$t_f < \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{\lambda - \tilde{C}_2}{\tilde{C}_1} \right)$$

saat  $v = \bar{v}, q = \bar{q}, r = \bar{r}, s = \bar{s}, w = \bar{w}, x = \bar{x}, y = \bar{y}, z = \bar{z}$ . Oleh karena itu solusinya adalah tunggal untuk interval waktu yang kecil.



### 4.3 Model III

Sama seperti model II, Model III dikonstruksi, kemudian dilakukan pencarian titik-titik kesetimbangan, bilangan reproduksi dasar, pengecekan eksistensi serta kestabilan dari titik-titik kesetimbangan tersebut, kemudian dilakukan pengecekan eksistensi dan penyelesaian kontrol optimal, serta ketunggalan dari sistem optimal yang diperoleh.

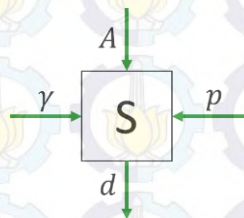
#### 4.3.1 Konstruksi Model

Model III dikonstruksi dari model *SEIT* dengan pengobatan pada populasi *exposed*. Laju perubahan populasi *susceptible*, *exposed*, *infective*, dan *treatment* pada model III adalah sebagai berikut.

- a. Laju perubahan populasi *susceptible*.



**Gambar 4.13** Diagram kompartemen interaksi  $S(t)$  dan  $I(t)$  pada model III



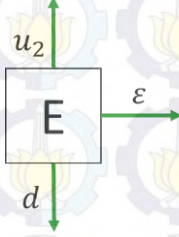
**Gambar 4.14** Diagram kompartemen populasi *susceptible* pada model III

Berdasarkan diagram kompartemen pada Gambar 4.13 dan 4.14, model laju perubahan populasi *susceptible* per satuan waktu seperti pada persamaan (4.1), yaitu

$$\dot{S}(t) = A - dS(t) - \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha I(t)} + \gamma I(t) + pT(t). \quad (4.26)$$

- b. Laju perubahan populasi *exposed*.



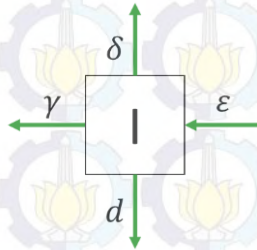


**Gambar 4.15** Diagram kompartemen populasi *exposed* pada model III

Adanya pengobatan pada individu *exposed* mengakibatkan adanya individu *exposed* yang sembuh dengan tingkat pengobatan  $u_2$ , sehingga  $-u_2E$  menyatakan berkurangnya populasi akibat individu *exposed* sembuh dengan pengobatan tiap waktu, seperti pada Gambar 4.15. Dengan demikian persamaan (4.2) menjadi

$$E'(t) = \mu \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha I(t)} - (d + \varepsilon + u_2)E(t). \quad (4.27)$$

c. Laju perubahan populasi *infective*.



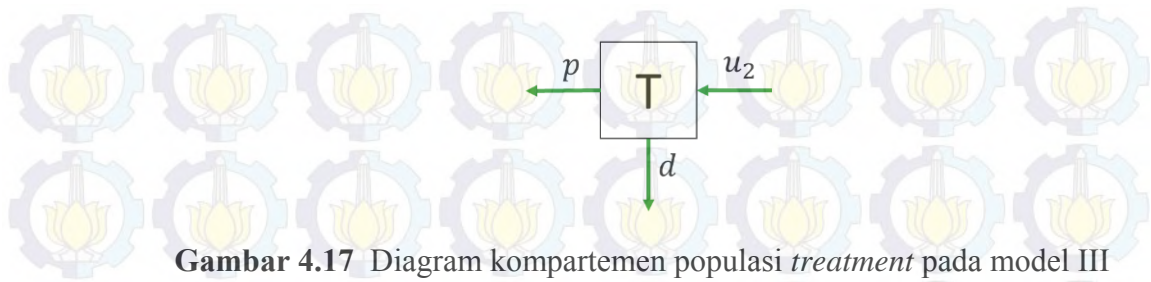
**Gambar 4.16** Diagram kompartemen populasi *infective* pada model III

Berdasarkan diagram kompartemen pada Gambar 4.13 dan 4.16, model laju perubahan populasi *infective* per satuan waktu seperti pada persamaan (4.3), yaitu

$$I'(t) = (1 - \mu) \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha I(t)} + \varepsilon E(t) - (d + \gamma + \delta)I(t). \quad (4.28)$$

d. Laju perubahan populasi *treatment*.





Adanya individu *exposed* yang diberi pengobatan mengakibatkan bertambahnya populasi *treatment* dengan tingkat  $u_2$ , sehingga  $u_2E$  menyatakan bertambahnya populasi akibat individu *exposed* sembuh dengan pengobatan tiap waktu, seperti pada Gambar 4.17. Dengan demikian persamaan (4.4) menjadi

$$\dot{T}(t) = u_2E(t) - (p + d)T(t). \quad (4.29)$$

Berikut ini adalah tabel laju perubahan keempat populasi tiap waktu berdasarkan persamaan (4.26), (4.27), (4.28), dan (4.29).

**Tabel 4.3** Laju perubahan populasi pada model III

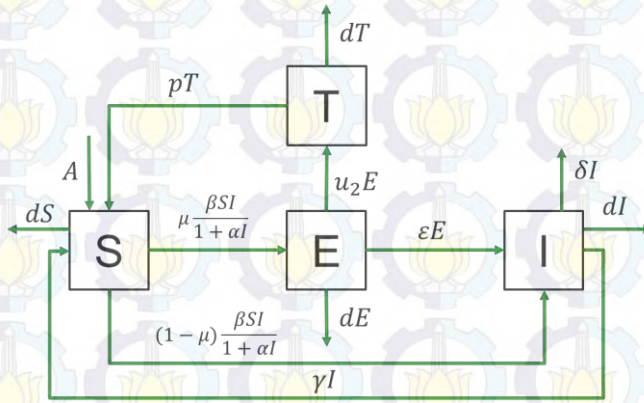
Faktor	Laju perubahan populasi tiap waktu $\left(\frac{d}{dt}\right)$			
	<i>Susceptible</i>	<i>Exposed</i>	<i>Infective</i>	<i>Treatment</i>
Kelahiran	$A$			
Kematian	$-dS(t)$	$-dE(t)$	$-(d + \delta)I(t)$	$-dT(t)$
Interaksi $S$ dan $I$	$-\frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha I(t)}$	$\mu \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha I(t)}$	$(1 - \mu) \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha I(t)}$	
Perubahan sifat $E$ menjadi $I$		$-\varepsilon E(t)$	$\varepsilon E(t)$	
Perubahan sifat $I$ menjadi $S$	$\gamma I(t)$		$-\gamma I(t)$	
Perubahan sifat $T$ menjadi $S$	$pT(t)$			$-pT(t)$
Pengobatan		$-u_2E(t)$		$u_2E(t)$



Dari Tabel 4.3 diperoleh laju perubahan populasi *susceptible*, *exposed*, *infective* dan *treatment*. Laju perubahan populasi-populasi tersebut memenuhi sistem persamaan diferensial nonlinear berikut.

$$\begin{aligned}\dot{S}(t) &= A - dS(t) - \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha I(t)} + \gamma I(t) + pT(t) \\ \dot{E}(t) &= \mu \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha I(t)} - (d + \varepsilon + u_2)E(t) \\ \dot{I}(t) &= (1 - \mu) \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha I(t)} + \varepsilon E(t) - (d + \gamma + \delta)I(t) \\ \dot{T}(t) &= u_2 E(t) - (p + d)T(t),\end{aligned}\tag{4.30}$$

dengan  $u_2$  adalah tingkat pengobatan populasi *exposed*. Diagram kompartemen dari sistem persamaan (4.30) secara skematis disajikan dalam Gambar 4.18 berikut.



**Gambar 4.18** Diagram kompartemen model III

Model III yang dinyatakan dalam sistem persamaan (4.30) diubah menjadi bentuk *EITN* seperti pada model I dan II, dengan mensubstitusikan  $S = N - E - I - T$  ke sistem persamaan (4.30), diperoleh

$$\begin{aligned}\dot{E} &= \mu \frac{\beta I}{1 + \alpha I} (N - E - I - T) - (d + \varepsilon + u_2)E \\ \dot{I} &= (1 - \mu) \frac{\beta I}{1 + \alpha I} (N - E - I - T) + \varepsilon E - (d + \gamma + \delta)I \\ \dot{T} &= u_2 E - (p + d)T \\ \dot{N} &= A - dN - \delta I,\end{aligned}\tag{4.31}$$



dengan  $D$  adalah daerah *invariant* positif dari model sistem persamaan (4.31).

$$D = \left\{ (E, I, T, N) \in \mathbb{R}_+^4 \mid E \geq 0, I \geq 0, T \geq 0, N \geq 0, E + I + T \leq N \leq \frac{A}{d} \right\}.$$

#### 4.3.2 Titik Keseimbangan

Model III yang dinyatakan dalam sistem persamaan (4.31) identik dengan model I yang dinyatakan dalam sistem persamaan (4.7). Perbedaannya yaitu adanya faktor pengobatan  $u_2E$  yang terdapat pada laju perubahan populasi *exposed* dan *treatment*, sehingga jika  $I = 0$  diperoleh titik keseimbangan bebas penyakit

$$P_c^0(E^0, I^0, T^0, N^0) = \left( 0, 0, 0, \frac{A}{d} \right).$$

Jika  $I \neq 0$  maka

$$\begin{aligned} u_2E - (p + d)T &= 0 \\ (p + d)T &= u_2E \\ T &= \frac{u_2E}{p + d}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Pada pembahasan titik keseimbangan model I dimisalkan  $m = d + \varepsilon$  dan  $n = d + \gamma + \delta$ , sehingga diperoleh pemisalan  $d + \varepsilon + u_2 = m + u_2$ . Berdasarkan persamaan (4.10), (4.11), (4.12), dan (4.32) diperoleh titik keseimbangan endemi untuk model III yaitu  $P_c^*(E^*, I^*, T^*, N^*)$  dengan

$$\begin{aligned} E^* &= \frac{\mu n}{(m + u_2)(1 - \mu) + \mu \varepsilon} I^* \\ I^* &= \frac{\frac{(m + u_2)n}{(m + u_2)(1 - \mu) + \mu \varepsilon} \left[ \frac{\beta A((m + u_2)(1 - \mu) + \mu \varepsilon)}{(m + u_2)nd} - 1 \right]}{\beta \left( \frac{\delta}{d} + \frac{\mu n}{(m + u_2)(1 - \mu) + \mu \varepsilon} + 1 \right) + \frac{\alpha(m + u_2)n}{(m + u_2)(1 - \mu) + \mu \varepsilon}} \\ T^* &= \frac{u_2 E^*}{p + d} \\ N^* &= \frac{A}{d} - \frac{\delta I^*}{d} \end{aligned}$$

Dari titik keseimbangan endemi diperoleh bilangan reproduksi dasar

$$\mathcal{R}_0^c = \frac{\beta A((m + u_2)(1 - \mu) + \mu \varepsilon)}{(m + u_2)nd}, \quad (4.33)$$



sehingga jika  $\mathcal{R}_0^c < 1$  maka hanya terdapat satu titik kesetimbangan yang eksis yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit. Sedangkan jika  $\mathcal{R}_0^c > 1$  maka terdapat dua titik kesetimbangan yang eksis, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemi.

#### 4.3.3 Kestabilan Lokal

Dari persamaan (4.24), berdasarkan analisis kestabilan titik kesetimbangan, jika  $\mathcal{R}_0^c = 1$  diperoleh

$$1 = \frac{\beta A((m + u_2)(1 - \mu) + \mu \varepsilon)}{(m + u_2)nd}$$

$$(m + u_2)nd = \beta A((m + u_2)(1 - \mu) + \mu \varepsilon)$$

$$mnd + u_2nd = \beta A(m(1 - \mu) + \mu \varepsilon) + \beta A u_2(1 - \mu)$$

$$und - \beta A u_2(1 - \mu) = \beta A(m(1 - \mu) + \mu \varepsilon) - mnd$$

$$u_2(nd - \beta A(1 - \mu)) = \beta A(m(1 - \mu) + \mu \varepsilon) - mnd$$

$$u_2 = \frac{\beta A(m(1 - \mu) + \mu \varepsilon) - mnd}{nd - \beta A(1 - \mu)},$$

yang merupakan ambang batas bifurkasi. Jika  $\mathcal{R}_0^c > 1$  atau parameter pengobatan  $u_2 < \frac{\beta A(m(1 - \mu) + \mu \varepsilon) - mnd}{nd - \beta A(1 - \mu)}$ , maka titik kesetimbangan endemi stabil sedangkan titik kesetimbangan bebas penyakit tidak stabil. Sebaliknya jika  $\mathcal{R}_0^c < 1$  atau  $u_2 > \frac{\beta A(m(1 - \mu) + \mu \varepsilon) - mnd}{nd - \beta A(1 - \mu)}$ , maka hanya terdapat satu titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit yang bersifat stabil. Dari penjelasan tersebut diketahui bahwa semakin bertambahnya  $u_2$  maka semakin mendekati kondisi bebas penyakit. Dengan kata lain, pemberian pengobatan pada populasi *exposed* juga dapat meminimalisir penyebaran penyakit di suatu wilayah.

#### 4.3.4 Eksistensi Kontrol Optimal

Mengacu pada Teorema 2.7 tentang eksistensi kontrol optimal, maka model III memenuhi kondisi (i), (ii), (iv), dan (v) seperti yang telah dibuktikan pada Subbab 4.2.4. Selanjutnya dibuktikan sistem persamaan (4.31) memenuhi kondisi (iii). Berdasarkan sistem (4.31), persamaan ruas kanan (*Right Hand Side*) dari sistem tersebut dapat dinyatakan



$$\begin{bmatrix} -\frac{\mu\beta I}{1+\alpha I} - (d + \varepsilon + u_2) & -\frac{\mu\beta I}{1+\alpha I} & -\frac{\mu\beta I}{1+\alpha I} & \frac{\mu\beta I}{1+\alpha I} \\ -(1-\mu)\frac{\mu\beta I}{1+\alpha I} + \varepsilon & -(1-\mu)\frac{\mu\beta I}{1+\alpha I} - (d + \gamma + \delta) & -(1-\mu)\frac{\mu\beta I}{1+\alpha I} & (1-\mu)\frac{\mu\beta I}{1+\alpha I} \\ 0 & 0 & -(p+d) & 0 \\ 0 & -\delta & 0 & -d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ I \\ T \\ N \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2 E \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu \frac{\beta I}{1+\alpha I} (N - E - I - T) - (d + \varepsilon + u_2)E \\ (1-\mu)\frac{\beta I}{1+\alpha I} (N - E - I - T) + \varepsilon E - (d + \gamma + \delta)I \\ -(p+d)T \\ -dN - \delta I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2 E \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ A \end{bmatrix},$$

sehingga

$$\begin{bmatrix} \mu \frac{\beta IN}{1+\alpha I} \\ (1-\mu)\frac{\beta IN}{1+\alpha I} + \varepsilon E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu \frac{\beta I}{1+\alpha I} (E + I + T) + (d + \varepsilon + u_2)E \\ (1-\mu)\frac{\beta I}{1+\alpha I} (E + I + T) + (d + \gamma + \delta)I \\ (p+d)T \\ dN + \delta I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2 E \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ A \end{bmatrix} \\ \leq \begin{bmatrix} \mu \frac{\beta IN}{1+\alpha I} \\ (1-\mu)\frac{\beta IN}{1+\alpha I} + \varepsilon E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2 E \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ A \end{bmatrix},$$

diperoleh

$$\begin{bmatrix} \mu \frac{\beta IN}{1+\alpha I} \\ (1-\mu)\frac{\beta IN}{1+\alpha I} + \varepsilon E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2 E \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ A \end{bmatrix} \leq \left\| \begin{bmatrix} \mu \frac{\beta IN}{1+\alpha I} \\ (1-\mu)\frac{\beta IN}{1+\alpha I} + \varepsilon E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| + \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2 E \\ 0 \end{bmatrix} \right\| + \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ A \end{bmatrix} \right\|.$$

Sehingga didapatkan

$$\dot{E} = f_1(E, I, T, N, u_2) \leq \left| \mu \frac{\beta IN}{1+\alpha I} \right|$$

$$\dot{I} = f_2(E, I, T, N, u_2) \leq \left| (1-\mu) \frac{\beta IN}{1+\alpha I} + \varepsilon E \right| \leq \left| (1-\mu) \frac{\beta IN}{1+\alpha I} \right| \leq |\varepsilon E|$$

$$\dot{T} = f_3(E, I, T, N, u_2) \leq |u_2 E|$$

$$\dot{N} = f_4(E, I, T, N, u_2) \leq |A|.$$

Berdasarkan pembuktian pada Subbab 4.2.4 diperoleh ruas kanan persamaan  $\dot{E}, \dot{I}, \dot{N}$  terbatas, sedemikian sehingga  $f_1(E, I, T, N, u_2) \leq M_1$ ,  $f_2(E, I, T, N, u_2) \leq M_2$ , dan  $f_4(E, I, T, N, u_2) \leq M_4$ . Untuk laju perubahan populasi *treatment*, saat  $t = t_f$  diperoleh  $u_2 E \leq u_2 E_{maks}$ . Berdasarkan asumsi bahwa fungsi kontrol dalam keadaan terbatas maka terdapat bilangan positif  $m$  sedemikian



sehingga  $|u_2| \leq m$  dan  $u_2 E_{maks} \leq m E_{maks}$ . Dengan menganggap  $M_3 = m E_{maks}$  maka terdapat konstanta  $M_3$  sedemikian sehingga  $f_3(E, I, T, N, u_2) \leq M_3$ , dengan kata lain ruas kanan persamaan  $\dot{T}$  terbatas.

Berdasarkan pembuktian diatas, didapatkan

$$\begin{bmatrix} -\frac{\mu\beta I}{1+\alpha I} - (d + \varepsilon + u_2) & -\frac{\mu\beta I}{1+\alpha I} & -\frac{\mu\beta I}{1+\alpha I} & \frac{\mu\beta I}{1+\alpha I} \\ -(1-\mu)\frac{\mu\beta I}{1+\alpha I} + \varepsilon & -(1-\mu)\frac{\mu\beta I}{1+\alpha I} - (d + \gamma + \delta) & -(1-\mu)\frac{\mu\beta I}{1+\alpha I} & (1-\mu)\frac{\mu\beta I}{1+\alpha I} \\ 0 & 0 & -(p+d) & 0 \\ 0 & -\delta & 0 & -d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ I \\ T \\ N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2 E \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ A \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mu \frac{\beta I N}{1+\alpha I} \\ (1-\mu)\frac{\beta I N}{1+\alpha I} + \varepsilon E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2 E \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ A \end{bmatrix} \leq \vec{M} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix},$$

terbukti bahwa persamaan ruas kanan dari sistem (4.31) terbatas oleh fungsi linear pada *state* dan kontrol optimal. Berdasarkan pembuktian tersebut, terbukti bahwa kontrol optimal pada model III dapat dijamin eksistensinya

#### 4.3.5 Penyelesaian Kontrol Optimal

Langkah pertama yang dilakukan untuk mendapatkan kontrol optimal adalah membentuk fungsi Hamilton. Berdasarkan fungsi objektif (2.14), maka

$$H(E, I, T, N, u_2, \lambda) = I(t) + \frac{C}{2} u_2^2(t) + \sum_{i=1}^4 \lambda_i f_i,$$

dengan  $\lambda_i$  dan  $f_i$  berturut-turut menyatakan variabel *costate* dan ruas kanan dari sistem persamaan (4.31). Fungsi Hamilton tersebut dapat ditulis kembali sebagai  $H(E, I, T, N, u_2, \lambda)$

$$\begin{aligned} &= I(t) + \frac{C}{2} u_2^2(t) \\ &+ \lambda_1(t) \left( \mu \frac{\beta I(t)}{1+\alpha I(t)} (N(t) - E(t) - I(t) - T(t)) - (d + \varepsilon + u_2(t)) E(t) \right) \\ &+ \lambda_2(t) \left( (1-\mu) \frac{\beta I(t)}{1+\alpha I(t)} (N(t) - E(t) - I(t) - T(t)) + \varepsilon E(t) \right. \\ &\quad \left. - (d + \gamma + \delta) I(t) \right) + \lambda_3(t) (u_2(t) E(t) - (p + d) T(t)) \\ &+ \lambda_4(t) (A - d N(t) - \delta I(t)) \end{aligned}$$



Menurut Prinsip Pontryagin, fungsi Hamilton mencapai solusi optimal jika berlaku persamaan *state* dan *costate* serta kondisi stasioner.

1) Persamaan *state*

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_1} = \dot{E}(t) = \mu \frac{\beta I(t)}{1 + \alpha I(t)} (N(t) - E(t) - I(t) - T(t)) - (d + \varepsilon + u_2(t))E(t)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_2} = \dot{I}(t) = (1 - \mu) \frac{\beta I(t)}{1 + \alpha I(t)} (N(t) - E(t) - I(t) - T(t)) + \varepsilon E(t) - (d + \gamma + \delta)I(t)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_3} = \dot{T}(t) = u_2(t)E(t) - (p + d)T(t)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_4} = \dot{N}(t) = A - dN(t) - \delta I(t).$$

2) Persamaan *costate*

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial E} \\ &= -\left[ -\lambda_1(t)\mu \frac{\beta I(t)}{1 + \alpha I(t)} - \lambda_1(t)(d + \varepsilon + u_2(t)) \right. \\ &\quad \left. - \lambda_2(1 - \mu) \frac{\beta I(t)}{1 + \alpha I(t)} + \lambda_2(t)\varepsilon + \lambda_3(t)u_2(t) \right] \\ &= (\lambda_1(t)\mu + \lambda_2(t)(1 - \mu)) \frac{\beta I(t)}{1 + \alpha I(t)} + (\lambda_1(t) - \lambda_2(t))\varepsilon + (\lambda_1(t) \\ &\quad - \lambda_3(t))u_2(t) + \lambda_1(t)d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_2}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial I} \\ &= -\left[ 1 + \lambda_1(t)\mu \frac{\beta(N(t) - E(t) - T(t) - 2I(t) - \alpha I^2(t))}{(1 + \alpha I(t))^2} \right. \\ &\quad \left. + \lambda_2(t)(1 - \mu) \frac{\beta(N(t) - E(t) - T(t) - 2I(t) - \alpha I^2(t))}{(1 + \alpha I(t))^2} \right. \\ &\quad \left. - \lambda_2(t)(d + \gamma + \delta) - \lambda_4(t)\delta \right] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= -(\lambda_1(t)\mu + \lambda_2(t)(1 - \mu)) \frac{\beta(N(t) - E(t) - T(t) - 2I(t) - \alpha I^2(t))}{(1 + \alpha I(t))^2} \\
&\quad + \lambda_2(t)(d + \gamma) + (\lambda_2(t) + \lambda_4(t))\delta - 1 \\
\frac{d\lambda_3}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial T} \\
&= -\left[ -\lambda_1(t)\mu \frac{\beta I(t)}{1 + \alpha I(t)} - \lambda_2(1 - \mu) \frac{\beta I(t)}{1 + \alpha I(t)} - \lambda_3(t)(p + d) \right] \\
&= (\lambda_1(t)\mu + \lambda_2(1 - \mu)) \frac{\beta I(t)}{1 + \alpha I(t)} + \lambda_3(t)(p + d) \\
\frac{d\lambda_4}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial N} \\
&= -\left[ \lambda_1(t)\mu \frac{\beta I(t)}{1 + \alpha I(t)} + \lambda_2(1 - \mu) \frac{\beta I(t)}{1 + \alpha I(t)} - \lambda_4(t)d \right] \\
&= -(\lambda_1(t)\mu + \lambda_2(1 - \mu)) \frac{\beta I(t)}{1 + \alpha I(t)} + \lambda_4(t)d.
\end{aligned}$$

3) Kondisi stasioner

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial u_2} &= 0, \\
Cu_2(t) - \lambda_1(t)E(t) + \lambda_3(t)E(t) &= 0, \\
Cu_2(t) &= (\lambda_1(t) - \lambda_3(t))E(t), \\
\bar{u}_2(t) &= \frac{(\lambda_1(t) - \lambda_3(t))E_*(t)}{C}
\end{aligned}$$

Karena  $0 \leq u_2(t) \leq 0.9$  sehingga

$$u_{2*}(t) = \begin{cases} 0 & , \bar{u}_2(t) \leq 0 \\ \bar{u}_2(t) & , 0 < \bar{u}_2(t) < 0.9 \\ 0.9 & , \bar{u}_2(t) \geq 0.9 \end{cases}$$

Jadi, kontrol optimal  $u_{2*}(t)$  dicirikan sebagai

$$u_{2*}(t) = \min(0.9, \max(0, \bar{u}_2(t)))$$

atau

$$u_{2*}(t) = \min \left( 0.9, \max \left( 0, \frac{(\lambda_1(t) - \lambda_3(t))E_*(t)}{C} \right) \right).$$

Sistem optimal didapat dengan memasukkan kontrol optimal  $u_{2*}(t)$  ke dalam sistem persamaan *state* dan *costate* sehingga diperoleh sistem yang optimal sebagai berikut.



$$\frac{dE_*(t)}{dt} = \mu \frac{\beta I_*(t)}{1 + \alpha I_*(t)} (N_*(t) - E_*(t) - I_*(t) - T_*(t)) - (d + \varepsilon + u_{2*}(t))E_*(t) \quad (4.34.a)$$

$$\frac{dI_*(t)}{dt} = (1 - \mu) \frac{\beta I_*(t)}{1 + \alpha I_*(t)} (N_*(t) - E_*(t) - I_*(t) - T_*(t)) + \varepsilon E_*(t) - (d + \gamma + \delta)I_*(t) \quad (4.34.b)$$

$$\frac{dT_*(t)}{dt} = u_{2*}(t)E_*(t) - (p + d)T_*(t) \quad (4.34.c)$$

$$\frac{dN_*(t)}{dt} = A - dN_*(t) - \delta I_*(t) \quad (4.34.d)$$

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = (\lambda_1(t)\mu + \lambda_2(t)(1 - \mu)) \frac{\beta I_*(t)}{1 + \alpha I_*(t)} + (\lambda_1(t) - \lambda_2(t))\varepsilon + (\lambda_1(t) - \lambda_3(t))u_{2*}(t) + \lambda_1(t)d \quad (4.34.e)$$

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = -(\lambda_1(t)\mu + \lambda_2(t)(1 - \mu)) \frac{\beta (N_*(t) - E_*(t) - T_*(t) - 2I_*(t) - \alpha I_*(t)^2)}{(1 + \alpha I_*(t))^2} + \lambda_2(t)(d + \gamma) + (\lambda_2(t) + \lambda_4(t))\delta - 1 \quad (4.34.f)$$

$$\frac{d\lambda_3}{dt} = (\lambda_1(t)\mu + \lambda_2(t)(1 - \mu)) \frac{\beta I_*(t)}{1 + \alpha I_*(t)} + \lambda_3(t)(p + d) \quad (4.34.g)$$

$$\frac{d\lambda_4}{dt} = -(\lambda_1(t)\mu + \lambda_2(t)(1 - \mu)) \frac{\beta I_*(t)}{1 + \alpha I_*(t)} + \lambda_4(t)d \quad (4.34.h)$$

Dengan kondisi batas yaitu  $E(0) = E_0, I(0) = I_0, T(0) = T_0, N(0) = N_0, \lambda_1(t_f) = 0, \lambda_2(t_f) = 0, \lambda_3(t_f) = 0, \text{ dan } \lambda_4(t_f) = 0$ .

#### 4.3.6 Ketunggalan Sistem Optimal

Misalkan  $(E, I, T, N, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$  dan  $(\bar{E}, \bar{I}, \bar{T}, \bar{N}, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3, \bar{\lambda}_4)$  adalah dua solusi yang berbeda dari sistem persamaan diferensial (4.34). Diberikan  $E = e^{\lambda t}v, I = e^{\lambda t}q, T = e^{\lambda t}r, N = e^{\lambda t}s, \lambda_1 = e^{-\lambda t}w, \lambda_2 = e^{-\lambda t}x, \lambda_3 = e^{-\lambda t}y, \lambda_4 = e^{-\lambda t}z$ , dan juga  $\bar{E} = e^{\lambda t}\bar{v}, \bar{I} = e^{\lambda t}\bar{q}, \bar{T} = e^{\lambda t}\bar{r}, \bar{N} = e^{\lambda t}\bar{s}, \bar{\lambda}_1 = e^{-\lambda t}\bar{w}, \bar{\lambda}_2 = e^{-\lambda t}\bar{x}, \bar{\lambda}_3 = e^{-\lambda t}\bar{y}, \bar{\lambda}_4 = e^{-\lambda t}\bar{z}$ , dengan  $\lambda > 0$ . Selanjutnya didapatkan bentuk kontrol optimal

$$u_{2*}(t) = \min \left( 0.9, \max \left( 0, \frac{(w - y)v}{C} \right) \right)$$

$$\bar{u}_{2*}(t) = \min \left( 0.9, \max \left( 0, \frac{(\bar{w} - \bar{y})\bar{v}}{C} \right) \right)$$



Menggunakan Lemma 4.1 diperoleh

$$\begin{aligned} |u_{2*}(t) - \bar{u}_{2*}(t)| &= \left| \min \left( 0.9, \max \left( 0, \frac{(w-y)v}{C} \right) \right) - \min \left( 0.9, \max \left( 0, \frac{(\bar{w}-\bar{y})\bar{v}}{C} \right) \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{C} |(w-y)v - (\bar{w}-\bar{y})\bar{v}| \leq \frac{1}{C} |wv - \bar{w}\bar{v}| \end{aligned}$$

Untuk solusi  $(E, I, T, N, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$  dan  $(\bar{E}, \bar{I}, \bar{T}, \bar{N}, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3, \bar{\lambda}_4)$ , berdasarkan persamaan (4.34.a) sampai (4.34.h) diperoleh

$$\begin{aligned} \dot{v} + \lambda v &= \mu \frac{\beta e^{\lambda t} q}{1 + \alpha e^{\lambda t} q} (s - v - q - r) \\ &\quad - \left( d + \varepsilon + \min \left( 0.9, \max \left( 0, \frac{(w-y)v}{C} \right) \right) \right) v \\ \dot{q} + \lambda q &= (1 - \mu) \frac{\beta e^{\lambda t} q}{1 + \alpha e^{\lambda t} q} (s - v - q - r) + \varepsilon v - (d + \gamma + \delta) q \\ \dot{r} + \lambda r &= \min \left( 0.9, \max \left( 0, \frac{(x-y)q}{C} \right) \right) v - (p + d) r \\ \dot{s} + \lambda s &= A - ds - \delta q, \\ -\dot{w} + \lambda w &= -(w\mu + x(1 - \mu)) \frac{\beta e^{\lambda t} q}{1 + \alpha e^{\lambda t} q} - (w - x)\varepsilon \\ &\quad - (w - y) \left( \min \left( 0.9, \max \left( 0, \frac{(w-y)v}{C} \right) \right) \right) - wd \\ -\dot{x} + \lambda x &= (w\mu + x(1 - \mu)) \frac{\beta e^{\lambda t} (s - v - r - 2q - \alpha e^{\lambda t} q^2)}{(1 + \alpha e^{\lambda t} q)^2} - x(d + \gamma) \\ &\quad - (x + z)\delta + e^{\lambda t} \\ -\dot{y} + \lambda y &= -(w\mu + x(1 - \mu)) \frac{\beta e^{\lambda t} q}{1 + \alpha e^{\lambda t} q} - y(p + d) \\ -\dot{z} + \lambda z &= (w\mu + x(1 - \mu)) \frac{\beta e^{\lambda t} q}{1 + \alpha e^{\lambda t} q} - dz \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \dot{\bar{v}} + \lambda \bar{v} &= \mu \frac{\beta e^{\lambda t} \bar{q}}{1 + \alpha e^{\lambda t} \bar{q}} (\bar{s} - \bar{v} - \bar{q} - \bar{r}) - \left( d + \varepsilon + \min \left( 0.9, \max \left( 0, \frac{(\bar{w}-\bar{y})\bar{v}}{C} \right) \right) \right) \bar{v} \\ \dot{\bar{q}} + \lambda \bar{q} &= (1 - \mu) \frac{\beta e^{\lambda t} \bar{q}}{1 + \alpha e^{\lambda t} \bar{q}} (\bar{s} - \bar{v} - \bar{q} - \bar{r}) + \varepsilon \bar{v} - (d + \gamma + \delta) \bar{q} \\ \dot{\bar{r}} + \lambda \bar{r} &= \min \left( 0.9, \max \left( 0, \frac{(\bar{x}-\bar{y})\bar{q}}{C} \right) \right) \bar{v} - (p + d) \bar{r} \end{aligned}$$



$$\dot{\bar{s}} + \lambda \bar{s} = A - d\bar{s} - \delta \bar{q}$$

$$\begin{aligned} -\dot{\bar{w}} + \lambda \bar{w} = & -(\bar{w}\mu + \bar{x}(1 - \mu)) \frac{\beta e^{\lambda t} \bar{q}}{1 + \alpha e^{\lambda t} \bar{q}} - (\bar{w} - \bar{x})\varepsilon \\ & - (\bar{w} - \bar{y}) \left( \min \left( 0.9, \max \left( 0, \frac{(\bar{w} - \bar{y})\bar{v}}{C} \right) \right) \right) - \bar{w}d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\dot{\bar{x}} + \lambda \bar{x} = & (\bar{w}\mu + \bar{x}(1 - \mu)) \frac{\beta e^{\lambda t} (\bar{s} - \bar{v} - \bar{r} - 2\bar{q} - \alpha e^{\lambda t} \bar{q}^2)}{(1 + \alpha e^{\lambda t} \bar{q})^2} - \bar{x}(d + \gamma) \\ & - (\bar{x} + \bar{z})\delta + e^{\lambda t} \end{aligned}$$

$$-\dot{\bar{y}} + \lambda \bar{y} = -(\bar{w}\mu + \bar{x}(1 - \mu)) \frac{\beta e^{\lambda t} \bar{q}}{1 + \alpha e^{\lambda t} \bar{q}} - \bar{y}(p + d)$$

$$-\dot{\bar{z}} + \lambda \bar{z} = (\bar{w}\mu + \bar{x}(1 - \mu)) \frac{\beta e^{\lambda t} \bar{q}}{1 + \alpha e^{\lambda t} \bar{q}} - d\bar{z}.$$

Dengan mengurangi persamaan  $E$  dengan  $\bar{E}$ ,  $I$  dengan  $\bar{I}$ ,  $T$  dengan  $\bar{T}$ ,  $N$  dengan  $\bar{N}$ ,  $\lambda_1$  dengan  $\bar{\lambda}_1$ ,  $\lambda_2$  dengan  $\bar{\lambda}_2$ ,  $\lambda_3$  dengan  $\bar{\lambda}_3$ ,  $\lambda_4$  dengan  $\bar{\lambda}_4$ . Kemudian mengalikan masing-masing persamaan dengan fungsi  $(v - \bar{v})$ ,  $(q - \bar{q})$ ,  $(r - \bar{r})$ ,  $(s - \bar{s})$ ,  $(w - \bar{w})$ ,  $(x - \bar{x})$ ,  $(y - \bar{y})$ , dan  $(z - \bar{z})$ , serta mengintegrasikan dari 0 sampai  $t_f$ . Sehingga diperoleh delapan persamaan yang digunakan untuk estimasi dalam memperoleh ketunggalan, hasilnya ditampilkan pada Lampiran 4. Gabungan dari delapan estimasi tersebut didapatkan

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(v - \bar{v})^2(t_f) + \frac{1}{2}(q - \bar{q})^2(t_f) + \frac{1}{2}(r - \bar{r})^2(t_f) + \frac{1}{2}(s - \bar{s})^2(t_f) \\ & + \frac{1}{2}(w - \bar{w})^2(0) + \frac{1}{2}(x - \bar{x})^2(0) + \frac{1}{2}(y - \bar{y})^2(0) \\ & + \frac{1}{2}(z - \bar{z})^2(0) \\ & + \lambda \int_0^{t_f} [(v - \bar{v})^2 + (q - \bar{q})^2 + (r - \bar{r})^2 + (s - \bar{s})^2 + (w - \bar{w})^2 \\ & + (x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 + (z - \bar{z})^2] dt \\ & \leq (\tilde{C}_1 e^{\lambda t_f} \\ & + \tilde{C}_2) \int_0^{t_f} [(v - \bar{v})^2 + (q - \bar{q})^2 + (r - \bar{r})^2 + (s - \bar{s})^2 \\ & + (w - \bar{w})^2 + (x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 + (z - \bar{z})^2] dt \end{aligned}$$

Dari persamaan di atas dapat disimpulkan bahwa



$$(\lambda - \tilde{C}_1 e^{\lambda t_f} - \tilde{C}_2) \int_0^{t_f} [(v - \bar{v})^2 + (q - \bar{q})^2 + (r - \bar{r})^2 + (s - \bar{s})^2 + (w - \bar{w})^2 + (x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 + (z - \bar{z})^2] dt \leq 0$$

dengan  $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$  bergantung pada semua koefisien dan batas pada  $v, q, r, s, w, x, y, z$ .

Jika memilih  $\lambda$  sedemikian sehingga  $\lambda - \tilde{C}_1 e^{\lambda t_f} - \tilde{C}_2 > 0$ , maka haruslah

$$\int_0^{t_f} [(v - \bar{v})^2 + (q - \bar{q})^2 + (r - \bar{r})^2 + (s - \bar{s})^2 + (w - \bar{w})^2 + (x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 + (z - \bar{z})^2] dt \leq 0$$

Sehingga

$$t_f < \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{\lambda - \tilde{C}_2}{\tilde{C}_1} \right)$$

saat  $v = \bar{v}, q = \bar{q}, r = \bar{r}, s = \bar{s}, w = \bar{w}, x = \bar{x}, y = \bar{y}, z = \bar{z}$ . Oleh karena itu solusinya adalah tunggal untuk interval waktu yang kecil.

#### 4.4 Simulasi Numerik

Dinamika penyakit menular pada model epidemi *SEIT* dapat diamati melalui simulasi numerik yang dibuat menggunakan *software* Matlab. Model I disimulasikan dengan metode Runge-Kutta Orde Empat (RK4), sedangkan pengaruh kontrol optimal pada model II dan III menggunakan metode Sweep Maju-Mundur. *Listing* program dari simulasi dijabarkan pada Lampiran 1 dan 2.

##### 4.4.1 Kestabilan Model I

Model I disimulasikan saat  $\mathcal{R}_0^a > 1$  dan  $\mathcal{R}_0^a < 1$ . Untuk mengetahui potret fase, model disimulasikan saat populasi awal  $(S^0, E^0, I^0, T^0)$  adalah  $(400, 15, 20, 0), (550, 21, 17, 0), (325, 50, 100, 0), (478, 25, 10, 0)$ . Untuk mengetahui perubahan jumlah populasi, model disimulasikan saat populasi awal  $(S^0, E^0, I^0, T^0, N^0)$  adalah  $(400, 15, 20, 0, 435)$ .

##### a. Simulasi numerik untuk $\mathcal{R}_0^a > 1$

Untuk simulasi numerik saat kondisi  $\mathcal{R}_0^a > 1$ , nilai parameter yang digunakan diberikan pada Tabel 4.4.

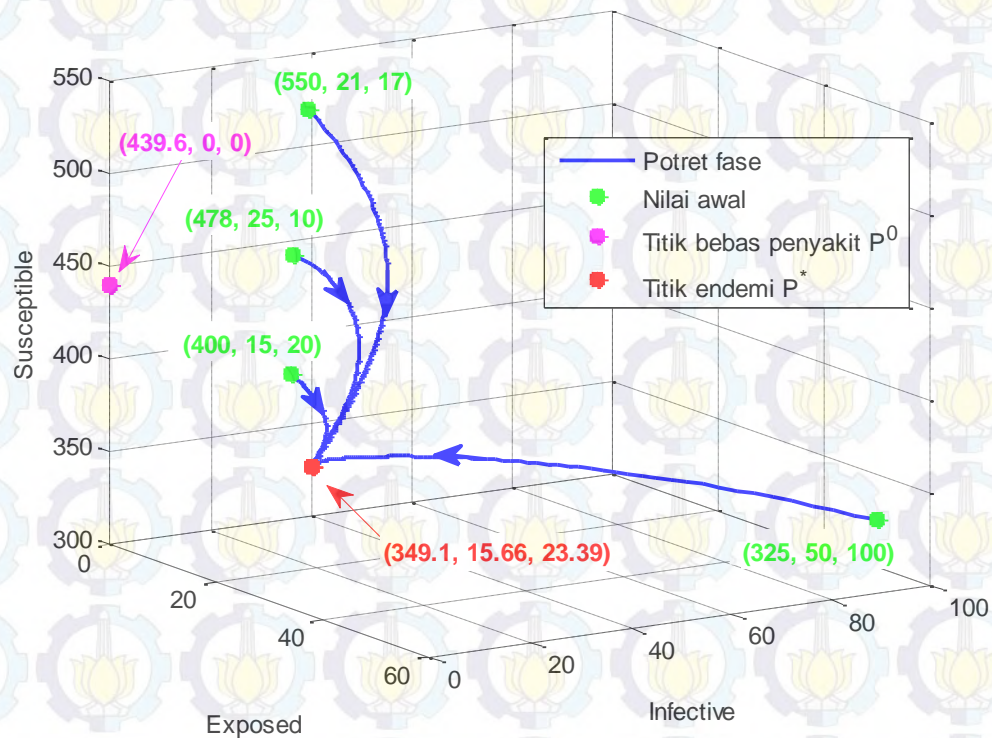


**Tabel 4.4** Nilai parameter yang digunakan dalam simulasi

Parameter	Nilai
$A$	20
$d$	0.0455
$\beta$	0.004
$\gamma$	0.07
$\mu$	0.75
$\alpha$	0.2
$\varepsilon$	0.23
$\delta$	0.1
$p$	0.3

Dari nilai-nilai parameter pada Tabel 4.4, didapatkan

$$\mathcal{R}_0^a = \frac{\beta A(m(1 - \mu) + \mu\varepsilon)}{mnd} = \frac{(0.004)(20)((0.2755)(1 - 0.75) + (0.75)(0.23))}{(0.2755)(0.2155)(0.0455)} = 7.1483.$$

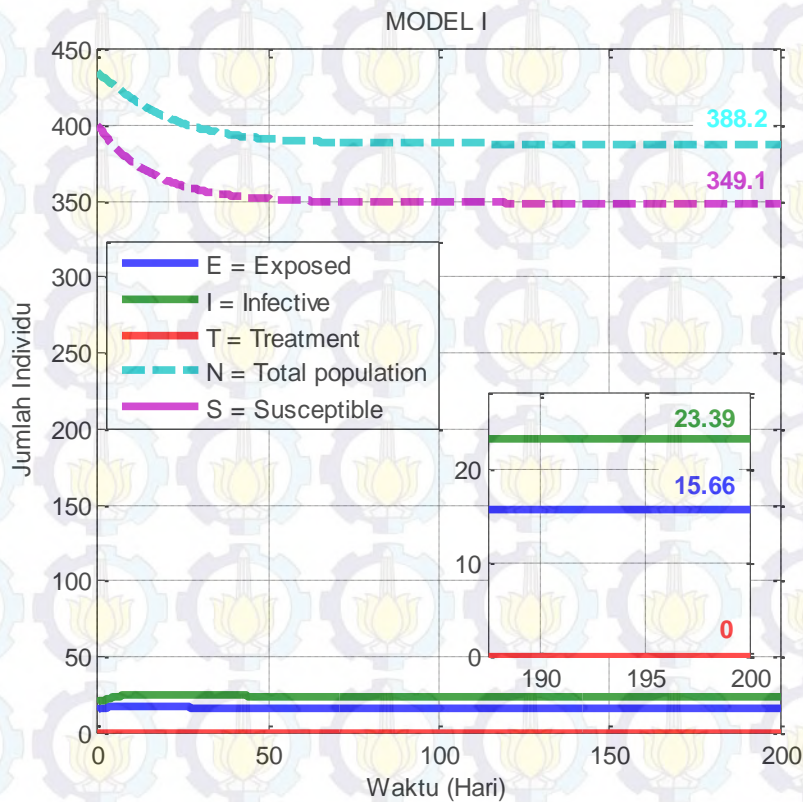


**Gambar 4.19** Potret fase model I untuk  $\mathcal{R}_0^a > 1$



serta titik-titik kesetimbangan, yaitu  $P_a^0(S^0, E^0, I^0, T^0) = (439.6, 0, 0, 0)$ , dan  $P_a^*(S^*, E^*, I^*, T^*) = (349.1, 15.66, 23.39, 0)$ . Dari titik kesetimbangan tersebut terlihat bahwa keduanya eksis, seperti yang ditampilkan pada Gambar 4.19. Berdasarkan Gambar 4.19 dapat diketahui bahwa dengan empat jumlah populasi awal yang berbeda, populasi akan stabil di titik kesetimbangan  $P_a^*$ .

Hal ini diperjelas pada Gambar 4.20, terlihat bahwa populasi akan stabil di  $S = 349.1, E = 15.66, I = 23.39, T = 0$ , dan jumlah populasi  $N = 388.2$ . Titik tersebut adalah titik kesetimbangan endemi. Hasil simulasi numerik sesuai dengan perhitungan analitik yang menunjukkan jika  $\mathcal{R}_0^a > 1$  maka titik kesetimbangan endemi bersifat stabil, sedangkan titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat tidak stabil.



**Gambar 4.20** Perubahan jumlah populasi model I untuk  $\mathcal{R}_0^a > 1$



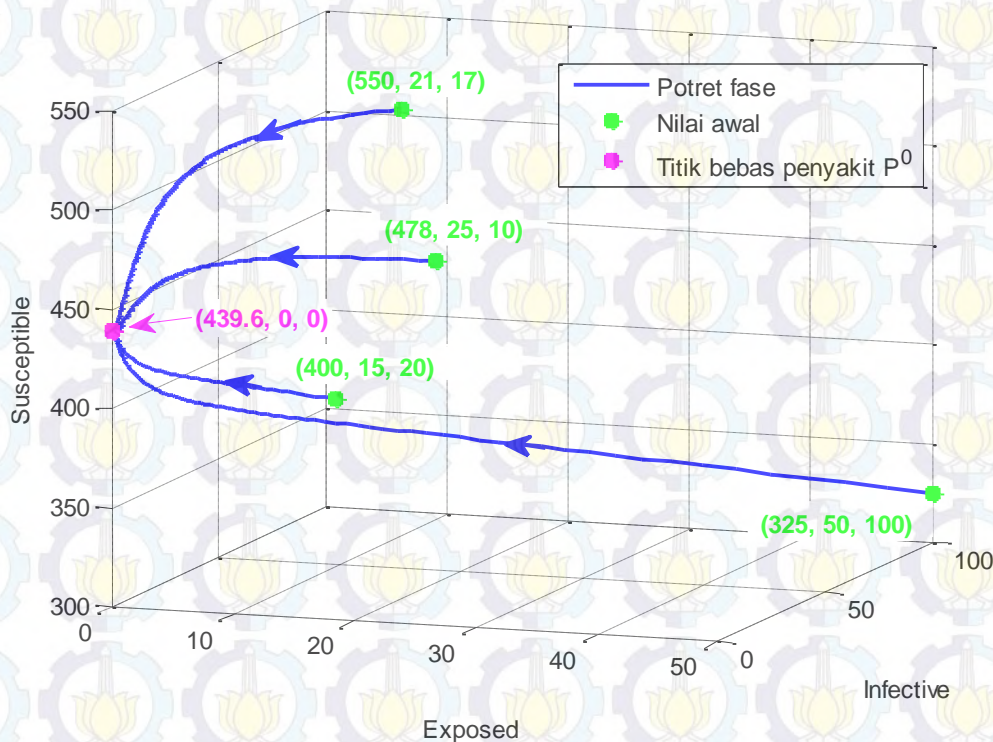
b. Simulasi numerik untuk  $\mathcal{R}_0^a < 1$

Untuk simulasi numerik saat kondisi  $\mathcal{R}_0^a < 1$ , nilai parameter yang digunakan diberikan pada Tabel 4.4, dengan memperkecil nilai parameter  $\beta$  menjadi 0.0005. Dari nilai-nilai parameter tersebut didapatkan

$$\mathcal{R}_0^a = \frac{\beta A(m(1 - \mu) + \mu \varepsilon)}{mnd} = \frac{(0.0005)(20)((0.2755)(1 - 0.75) + (0.75)(0.23))}{(0.2755)(0.2155)(0.0455)} = 0.8935.$$

serta hanya memiliki satu titik kesetimbangan yang eksis dan stabil, yaitu  $P_a^0(S^0, E^0, I^0, T^0) = (439.6, 0, 0, 0)$ , seperti yang ditampilkan pada Gambar 4.21.

Berdasarkan Gambar 4.21 dapat diketahui bahwa dengan empat jumlah populasi awal yang berbeda, populasi akan stabil di titik kesetimbangan  $P_a^0$ .

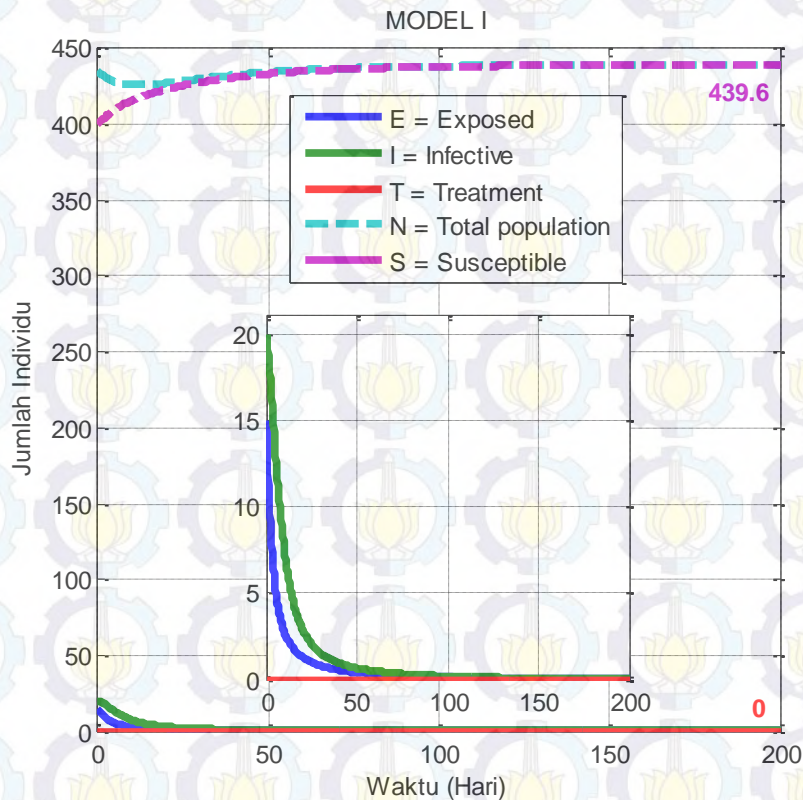


**Gambar 4.21** Potret fase model I untuk  $\mathcal{R}_0^a < 1$

Hal ini diperjelas pada Gambar 4.22, dengan memperkecil laju kelahiran dan laju penularan, maka populasi *exposed* dan *infective* terus mengalami penurunan sampai populasinya habis. Akibatnya dalam jangka panjang hanya



terdapat populasi *susceptible* yang hidup dan stabil di titik kesetimbangan bebas penyakit  $P_a^0(S^0, E^0, I^0, T^0, N^0) = (439.6, 0, 0, 0, 439.6)$ . Hasil simulasi numerik sesuai dengan perhitungan analitik yang menunjukkan jika  $\mathcal{R}_0^a < 1$  maka terdapat titik kesetimbangan bebas penyakit yang eksis dan bersifat stabil, sedangkan titik kesetimbangan endemi tidak eksis.



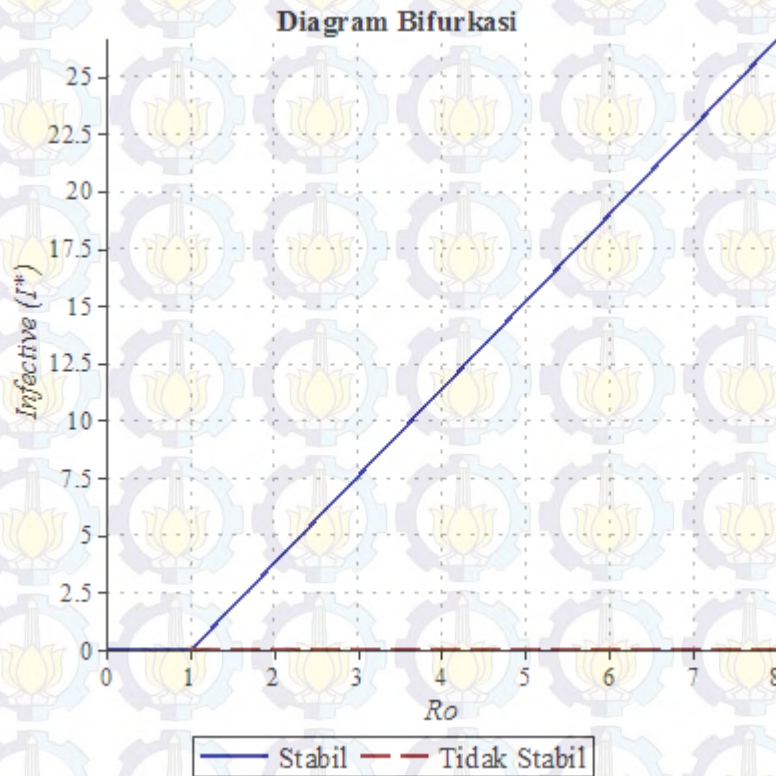
**Gambar 4.22** Perubahan jumlah populasi model I untuk  $\mathcal{R}_0^a < 1$

### c. Simulasi Bifurkasi Transkritikal

Berdasarkan Gambar 4.23 diketahui bahwa Bifurkasi Transkritikal terjadi saat parameter ambang batas bifurkasi  $\mathcal{R}_0^a = 1$ , akibatnya titik kesetimbangan bebas penyakit stabil jika dan hanya jika  $\mathcal{R}_0^a < 1$ , dan titik kesetimbangan endemi stabil jika dan hanya jika  $\mathcal{R}_0^a > 1$ . Selain itu, jika  $\mathcal{R}_0^a < 1$  maka titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil asimtotik global, dan jika  $\mathcal{R}_0^a > 1$  maka titik kesetimbangan endemi bersifat stabil asimtotik global. Ketika parameter bifurkasi  $\mathcal{R}_0^a$  melintasi ambang batas (*threshold*) bifurkasi, maka titik kesetimbangan endemi



memiliki nilai yang positif, sehingga titik kesetimbangan endemi eksis. Karena tingkat endemi pada kesetimbangan adalah fungsi yang kontinu dari  $\mathcal{R}_0^a$ , maka akan mudah dilakukan tindakan pemberantasan penyakit, yaitu dengan mengurangi bilangan reproduksi dasar  $\mathcal{R}_0^a$  secara terus menerus sampai melewati ambang batas dibawah 1.



**Gambar 4.23** Diagram bifurkasi pada bidang  $(\mathcal{R}_0^a, I^*)$

#### 4.4.2 Kontrol Optimal Model II dan III

Untuk simulasi pada model II dan III menggunakan Metode Sweep Maju-Mundur. Metode Sweep Maju-Mundur digunakan dengan mendiskritisasi interval  $[t_0, t_f]$  di titik  $t_i = t_0 + ih$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ), dengan  $h$  merupakan ukuran langkah waktu sehingga  $t_n = t_f$ . Selanjutnya, variabel  $E, I, T, N, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  dan  $u_j$  ( $j = 1, 2$ ) dinyatakan dalam bentuk titik nodal yaitu  $E^i, I^i, T^i, N^i, \lambda_1^i, \lambda_2^i, \lambda_3^i, \lambda_4^i$  dan  $u_j^i$ .

Variabel *state*  $E, I, T$ , dan  $N$  didekati dengan metode Runge Kutta Order 4 dengan nilai awal  $E(0) = E_0$ ,  $I(0) = I_0$ ,  $T(0) = T_0$ , dan  $N(0) = N_0$ . Sedangkan



variabel *costate*  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , dan  $\lambda_4$  juga didekati dengan Runge Kutta Order 4 dengan nilai awal  $\lambda_1(n) = 0, \lambda_2(n) = 0, \lambda_3(n) = 0$ , dan  $\lambda_4(n) = 0$ .

Langkah-langkah algoritma tersebut adalah sebagai berikut.

**Langkah 1**

Inisialisasi nilai  $u_j, u_{jold}, E, I, T, N, E_{old}, I_{old}, T_{old}, N_{old}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_{1old}, \lambda_{2old}, \lambda_{3old}$ , dan  $\lambda_{4old}$  dalam bentuk vektor 0 dengan  $n$  elemen,  $it = 0$  dan  $tes = 1$ .

**Langkah 2**

Mengganti nilai  $u_{jold}, E_{old}, I_{old}, T_{old}, N_{old}, \lambda_{1old}, \lambda_{2old}, \lambda_{3old}$ , dan  $\lambda_{4old}$  dengan  $u, E, I, T, N, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , dan  $\lambda_4$ .

**Langkah 3**

Mengganti nilai  $E(0) = E_0, I(0) = I_0, T(0) = T_0, N(0) = N_0$ , dan  $\lambda_1(n) = 0, \lambda_2(n) = 0, \lambda_3(n) = 0, \lambda_4(n) = 0$ , serta  $u_j(n) = 0$ .

**Langkah 4**

Untuk  $i = 0 : n - 1$ , nilai  $E(i + 1), I(i + 1), T(i + 1)$ , dan  $N(i + 1)$  dihitung dengan menggunakan Runge-Kutta Orde Empat.

**Langkah 5**

Menghitung  $u_j(n)$ , untuk model II adalah

$$u_1(n) = \min \left( 0.9, \max \left( 0, \frac{(\lambda_2(n) - \lambda_3(n))I^*(t)}{C} \right) \right),$$

dan untuk model III adalah

$$u_2(n) = \min \left( 0.9, \max \left( 0, \frac{(\lambda_1(n) - \lambda_3(t))E^*(n)}{C} \right) \right).$$

**Langkah 6**

Untuk  $k = n : 1$ , nilai  $\lambda_1(k - 1), \lambda_2(k - 1), \lambda_3(k - 1)$ , dan  $\lambda_4(k - 1)$  dihitung dengan menggunakan Runge-Kutta Orde Empat, serta menghitung

$$u_1(k - 1) = \min \left( 0.9, \max \left( 0, \frac{(\lambda_2(k - 1) - \lambda_3(k - 1))I^*(t)}{C} \right) \right)$$

untuk model II, dan

$$u_2(k - 1) = \min \left( 0.9, \max \left( 0, \frac{(\lambda_1(k - 1) - \lambda_3(k - 1))E^*(t)}{C} \right) \right)$$

untuk model III.



### Langkah 7

Menghitung

$$\text{error } E = \text{sum}(\text{abs}(E - E_{old})),$$

$$\text{error } I = \text{sum}(\text{abs}(I - I_{old})),$$

$$\text{error } T = \text{sum}(\text{abs}(T - T_{old})),$$

$$\text{error } N = \text{sum}(\text{abs}(N - N_{old})),$$

$$\text{error } \lambda_1 = \text{sum}(\text{abs}(\lambda_1 - \lambda_{1old})),$$

$$\text{error } \lambda_2 = \text{sum}(\text{abs}(\lambda_2 - \lambda_{2old})),$$

$$\text{error } \lambda_3 = \text{sum}(\text{abs}(\lambda_3 - \lambda_{3old})),$$

$$\text{error } \lambda_4 = \text{sum}(\text{abs}(\lambda_4 - \lambda_{4old})),$$

$$\text{error } u_j = \text{sum}(\text{abs}(u_j - u_{jold})),$$

$$\begin{aligned} \text{tes} = & \text{error } E + \text{error } I + \text{error } T + \text{error } N + \text{error } \lambda_1 + \text{error } \lambda_2 \\ & + \text{error } \lambda_3 + \text{error } \lambda_4 + \text{error } u_j, \end{aligned}$$

$$u = \left( \frac{1}{2} u_j + \frac{1}{2} u_{jold} \right),$$

$$it = it + 1.$$

Jika  $\text{tes} > 10^{-3}$ , maka kembali ke langkah 2.

### Langkah 8

Mencetak  $E_* = E, I_* = I, T_* = T, N_* = N, u_{j*} = u_j$ , dan  $S_* = N_* - E_* - I_* - T_*$ .

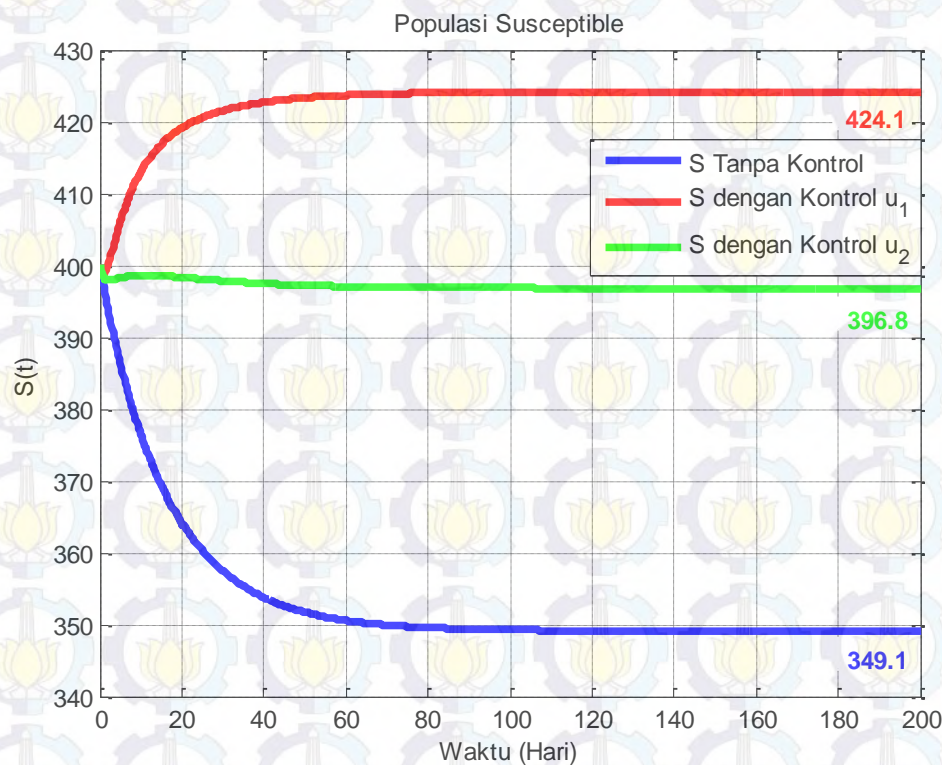
Untuk memperlihatkan pengaruh kontrol pengobatan pada model II dan III, simulasi numerik dibuat dengan menggunakan nilai awal atau populasi awal  $(S_0, E_0, I_0, T_0, N_0) = (400, 15, 20, 0, 435)$  dan nilai parameter-parameter yang memenuhi kondisi endemi di model I, yaitu saat  $\mathcal{R}_0^a > 1$ . Nilai parameter yang digunakan diberikan pada Tabel 4.1 dan  $C = 1$ . Dari nilai-nilai parameter tersebut diperoleh  $\mathcal{R}_0^a = 7.1483 > 1$ , maka kondisi endemi terpenuhi.

Masing-masing populasi dibuat simulasi dari perubahan jumlah individu setelah diberikan kontrol pengobatan, sebagai perbandingan disertakan perubahan jumlah individu tanpa kontrol pengobatan, yang ditunjukkan pada Gambar 4.20.



a. Populasi *Susceptible*

Berdasarkan Gambar 4.24 diketahui bahwa jumlah individu *susceptible* tanpa kontrol pengobatan mengalami penurunan sampai stabil berjumlah 349.1 individu sejak hari ke-85. Jika diberikan kontrol  $u_1$ , jumlah individu *susceptible* mengalami kenaikan yang signifikan, populasi meningkat dari hari pertama dan stabil menjadi 424.1 individu sejak hari ke-75. Hal ini menunjukkan adanya peningkatan individu sembuh setelah dikontrol sebanyak 75 individu. Sedangkan jika diberikan kontrol  $u_2$  jumlahnya relatif konstan sejak hari pertama sampai mencapai kestabilan sebanyak 396.8 individu pada hari ke-105, ada peningkatan sebanyak 27.3 individu setelah dikontrol.

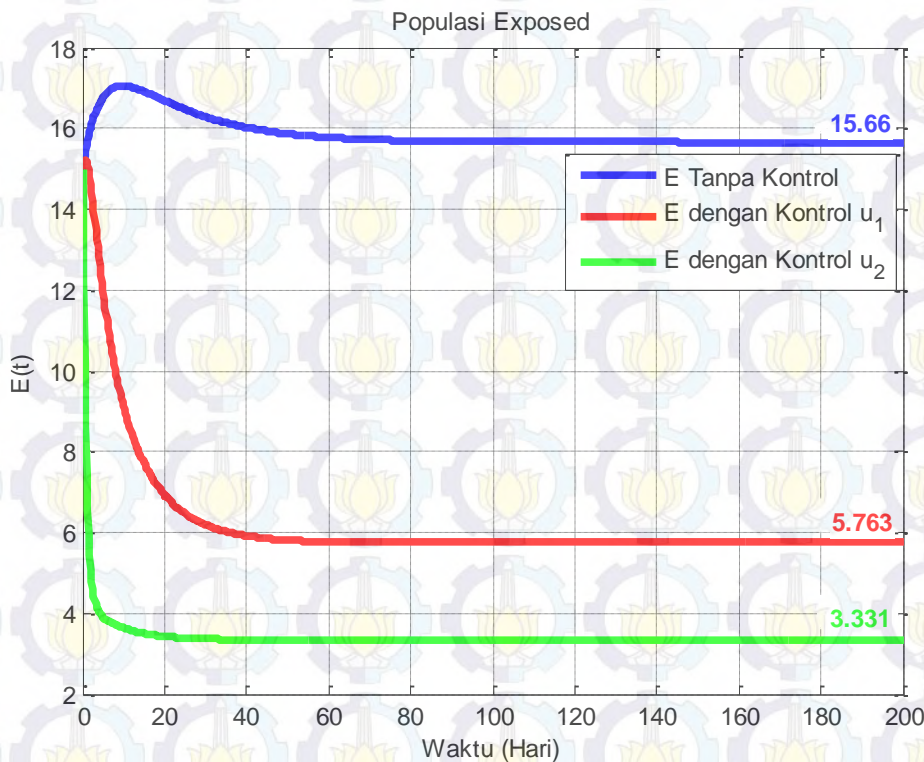


**Gambar 4.24** Perbandingan perubahan jumlah individu *susceptible* tanpa dan dengan kontrol



b. Populasi *Exposed*

Berdasarkan Gambar 4.25 diketahui bahwa jumlah individu *Exposed* tanpa pengobatan akan naik dari hari pertama dan pada hari ke-10 turun kemudian stabil berjumlah 15.66 individu setelah hari ke-145. Jika diberikan kontrol  $u_1$  jumlahnya juga terus menurun sejak hari pertama dan stabil mencapai jumlah 5.763 individu pada hari ke-55. Kontrol  $u_1$  mengakibatkan pengurangan sebanyak 9.897 individu. Sedangkan jika diberikan kontrol  $u_2$  jumlahnya berkurang sebanyak 12.329 individu, sehingga stabil menjadi 3.331 individu pada hari ke-34.



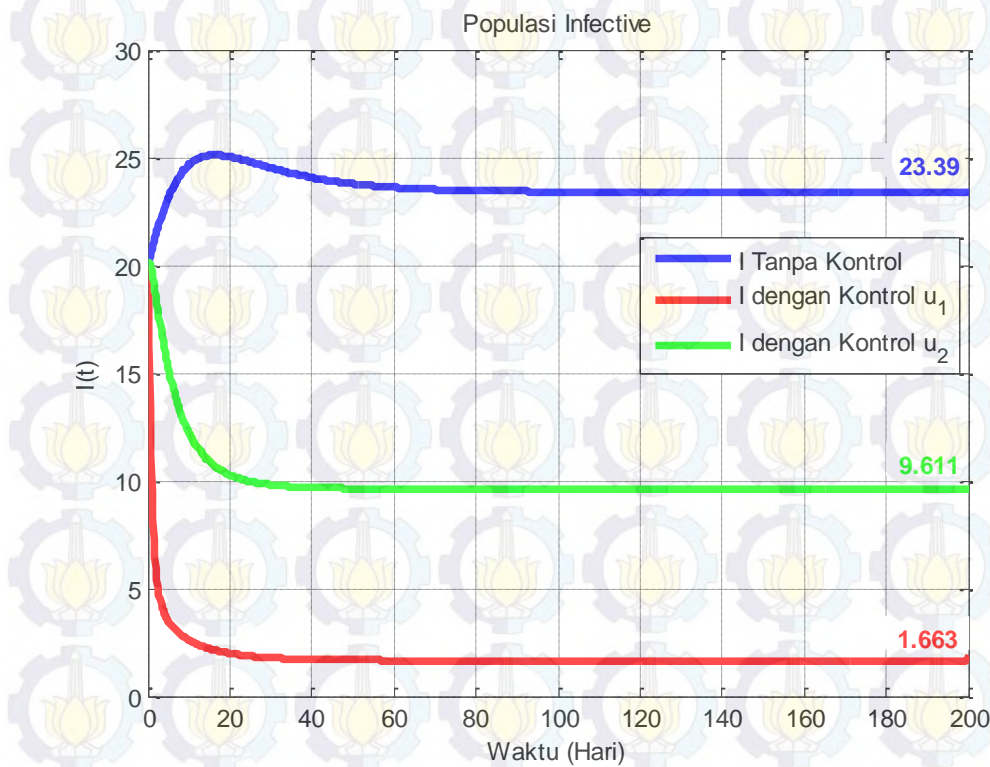
**Gambar 4.25** Perbandingan perubahan jumlah individu *exposed* tanpa dan dengan kontrol

c. Populasi *Infective*

Berdasarkan Gambar 4.26 tampak bahwa jumlah individu *infective* tanpa pengobatan naik dari hari pertama, kemudian stabil di angka 23.39 sejak hari ke-93. Tetapi setelah diberi kontrol  $u_1$  jumlahnya berkurang dan stabil menjadi 1.663 pada hari ke-48. Hal ini menunjukkan adanya pengurangan sebanyak 21.727



individu. Sedangkan jika diberi kontrol  $u_2$  jumlahnya stabil menjadi 9.611 pada hari ke-44, jumlahnya hanya berkurang sebanyak 13.779 individu. Kontrol pengobatan  $u_1$  mengakibatkan pengurangan jumlah individu *infective* yang lebih banyak daripada kontrol pengobatan  $u_2$ .

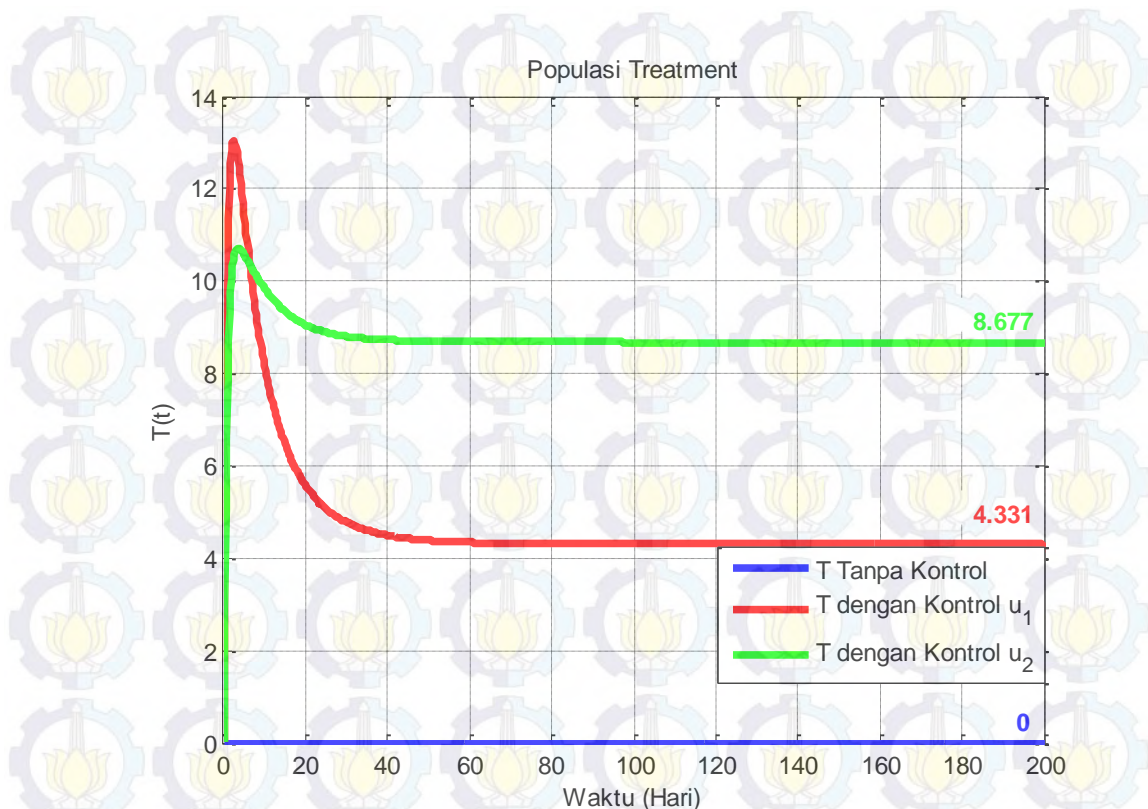


**Gambar 4.26** Perbandingan perubahan jumlah individu *infective* tanpa dan dengan kontrol

d. Populasi *Treatment*

Gambar 4.27 menunjukkan bahwa akibat tidak adanya pengobatan, maka tetap tidak ada populasi *treatment* pada model I. Untuk model dengan kontrol  $u_1$ , jumlah individu *treatment* meningkat sampai 13 individu pada hari ke-2, setelah itu turun kembali sampai 4.331 individu pada hari ke-61. Sedangkan jika diberikan kontrol  $u_2$  jumlah individu hanya meningkat sampai sebesar 10.8 individu pada hari ke-2, kemudian turun sampai stabil menjadi 8.677 individu sejak hari ke-98.



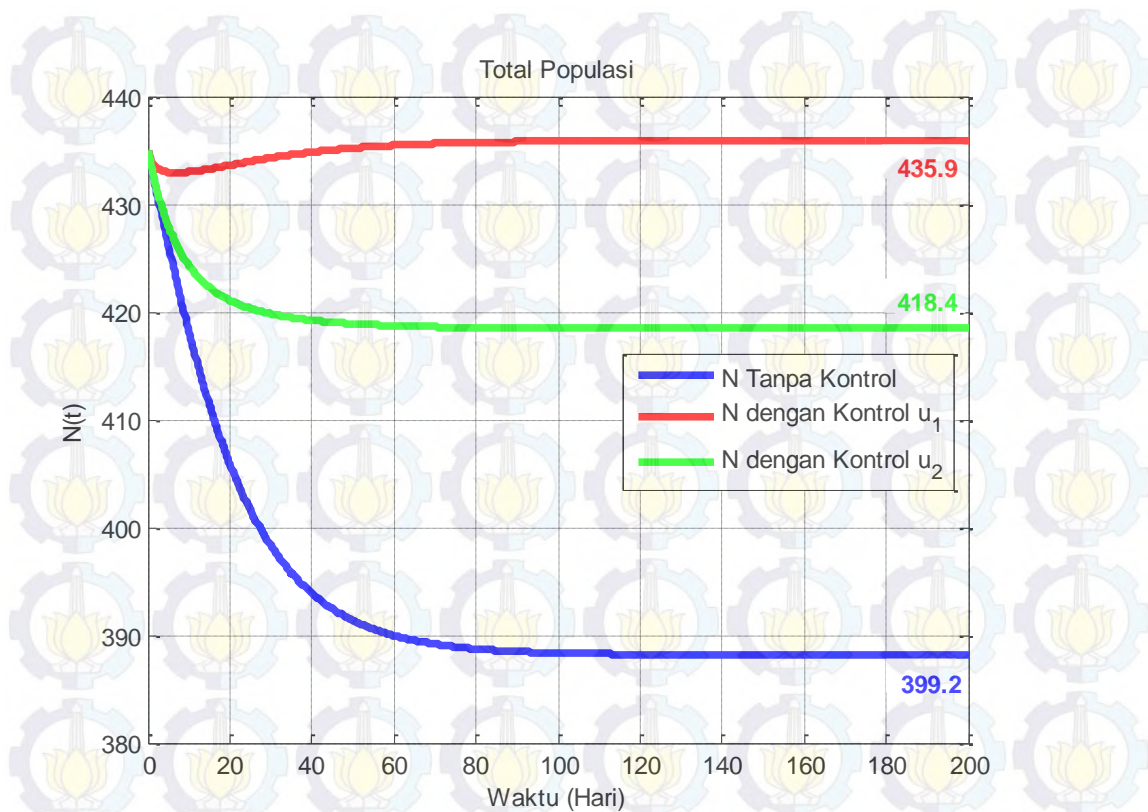


**Gambar 4.27** Perbandingan perubahan jumlah individu *treatment* tanpa dan dengan kontrol

e. Total Individu

Jika dilihat dari jumlah total individu di keempat populasi, Gambar 4.28 menunjukkan bahwa model I tanpa kontrol pengobatan mengalami penurunan populasi sejak awal dari 435 menjadi 399.2 pada hari ke-114. Jumlah populasi dapat ditingkatkan dengan pemberian kontrol pengobatan, hal ini terbukti pada model III dengan kontrol  $u_2$  jumlah total individu mengalami penurunan sampai 418.4 pada hari ke-71, meningkat sebanyak 19.2 individu dari model tanpa pengobatan. Pada model II dengan kontrol  $u_1$ , jumlah total individu di keempat populasi justru meningkat menjadi stabil sejumlah 435.9 individu sejak hari ke-89, terjadi peningkatan sebanyak 36.7 individu dari model tanpa pengobatan.



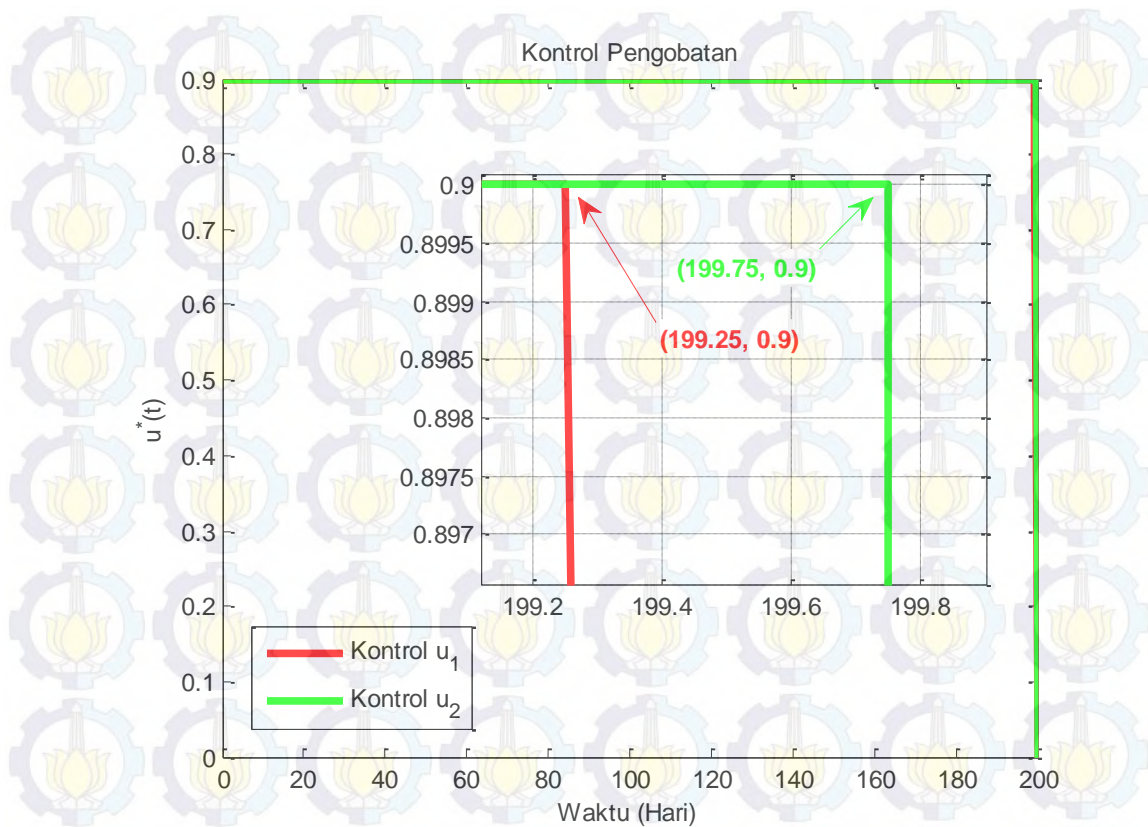


**Gambar 4.28** Perbandingan perubahan jumlah total individu tanpa dan dengan kontrol

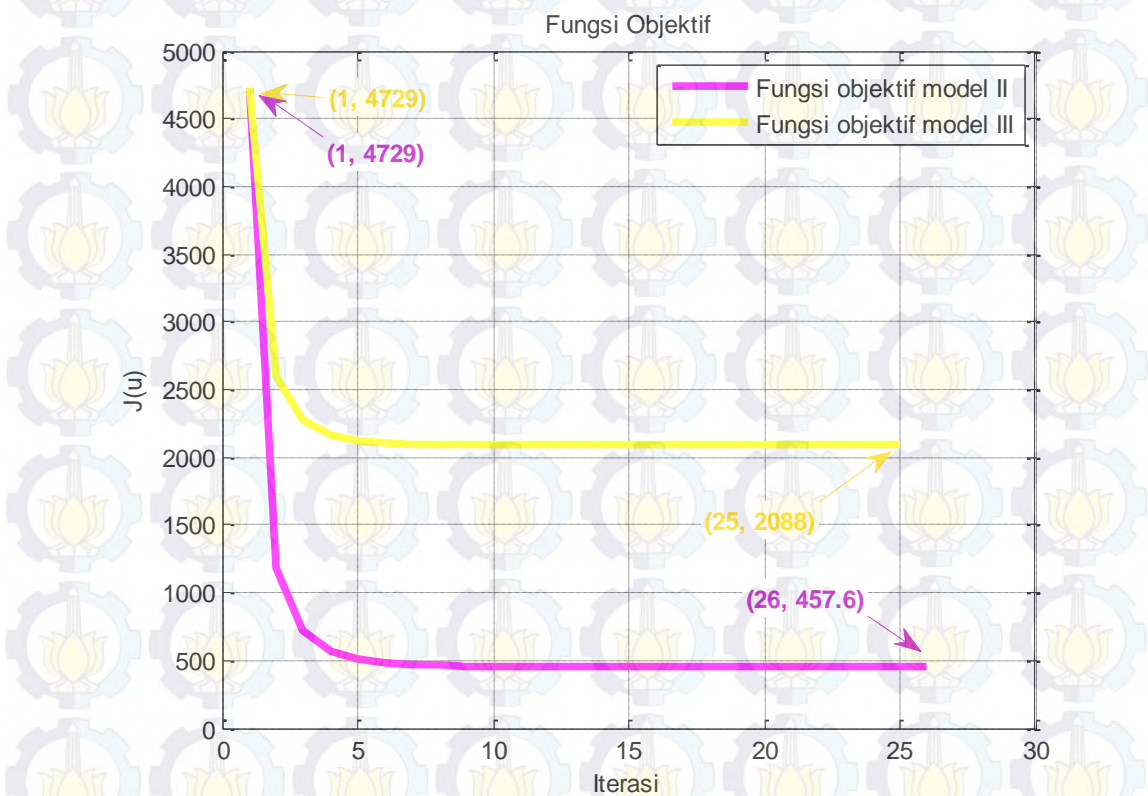
f. Perbandingan model II dan III

Pada Gambar 4.29 terlihat bahwa banyaknya kontrol optimal  $u_{1*}(t)$  pada awal periode pemberian pengobatan adalah maksimum yaitu sebesar 0.9. Kemudian sejak hari ke-199.25 mulai mengalami penurunan pengobatan sampai mencapai minimum pada akhir periode yaitu 0. Jika diberikan kontrol pengobatan  $u_{2*}(t)$ , pengobatan maksimum diberikan dari hari pertama sampai hari ke-199.25, setelah itu pemberian pengobatan mengalami penurunan sampai 0 pada akhir periode. Hal ini menunjukkan pemberian pengobatan pada populasi terinfeksi (*exposed* atau *infective*) semakin berkurang karena populasi tersebut mulai mengalami kesembuhan. Dengan menerapkan kontrol  $u_1$  atau  $u_2$  dalam mengendalikan penyebaran suatu penyakit diperoleh hasil optimal, yang mengakibatkan fungsi objektif ( $J$ ) bernilai minimum, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.30.





**Gambar 4.29** Perubahan pemberian kontrol optimal  $u_*(t)$



**Gambar 4.30** Perubahan nilai fungsi objektif ( $J$ )



Berdasarkan Gambar 4.30, dengan kontrol pengobatan  $u_1$  pada model II, fungsi objektif yang awalnya bernilai 4729 akan berkurang dan bernilai minimum sebesar 457.6 pada iterasi ke-26. Sedangkan dengan kontrol pengobatan  $u_2$  pada model III, fungsi objektif bernilai minimum sebesar 2088 pada iterasi ke-25. Dari kedua fungsi objektif tersebut terlihat bahwa pemberian kontrol pengobatan  $u_1$  lebih optimal daripada  $u_2$ , hal ini terbukti juga dari Gambar 4.26 yang menampilkan jumlah individu *infective* yang lebih sedikit dengan pemberian kontrol  $u_1$ . Dari Gambar 4.24 dan 4.28 juga terlihat bahwa pemberian kontrol  $u_1$  lebih banyak menambah individu *susceptible* dan jumlah total individu. Dari hasil simulasi numerik tersebut dapat disimpulkan bahwa pemberian kontrol pengobatan  $u_1$  pada populasi *infective* lebih efektif daripada pemberian kontrol  $u_2$  pada populasi *exposed*.



## BAB 5

### KESIMPULAN DAN SARAN

#### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan tujuan tesis pada Bab 1 dan pembahasan pada Bab 4, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut.

1. Dengan menggunakan model kompartemen, diperoleh model epidemi tipe *SEIT* dengan perbedaan periode *exposed* dan tingkat kejadian tersaturasi dari tiga kasus yang berbeda. Ketiga model berupa sistem persamaan *autonomous* nonlinear dengan empat variabel tak bebas. Model I tidak terdapat kontrol pengobatan, model II terdapat kontrol  $u_1$  pada laju perubahan populasi *infective*, dan model III terdapat kontrol  $u_2$  pada laju perubahan populasi *exposed*.
2. Ketiga model memiliki dua titik kesetimbangan. Bilangan reproduksi dasar sama dengan satu adalah ambang batas bifurkasi (*bifurcation threshold*) transkritikal yang menentukan eksistensi dan kestabilan dari kedua titik kesetimbangan, yaitu
  - a. titik kesetimbangan bebas penyakit yang eksis dan bersifat stabil saat bilangan reproduksi dasar bernilai kurang dari satu,
  - b. titik kesetimbangan endemi yang eksis dan bersifat stabil saat bilangan reproduksi dasar bernilai lebih dari satu.
3. Berdasarkan hasil analisis, kontrol pengobatan pada model II dan III keduanya eksis, dan dengan menerapkan prinsip Pontryagin dapat diperoleh kontrol dan sistem yang optimal. Solusi dari sistem optimal yang diperoleh terbukti tunggal untuk interval waktu yang kecil.
4. Simulasi numerik yang dilakukan menunjukkan hasil yang sesuai dengan hasil analisis. Hasil simulasi menunjukkan keefektifan kontrol dalam mengendalikan penyebaran suatu penyakit sehingga dapat mengurangi jumlah individu terinfeksi dan meminimumkan biaya pengobatan. Dari hasil simulasi numerik tersebut dapat disimpulkan bahwa pemberian kontrol



pengobatan  $u_1$  pada populasi *infective* (model II) lebih efektif daripada pemberian kontrol  $u_2$  pada populasi *exposed* (model III).

## 5.2 Saran

Pada penulisan selanjutnya, hal yang dapat dikembangkan dari tesis ini adalah pembentukan model epidemi tipe *SEIT* dengan perbedaan periode *exposed* dan tingkat kejadian tersaturasi dengan pemberian kontrol pengobatan  $u_1$  dan  $u_2$  yang dilakukan bersamaan. Sehingga fungsi objektif yang digunakan adalah

$$\min J(u_j) = \int_{t_0}^{t_f} \left( I(t) + \frac{C}{2} u_1^2(t) + \frac{D}{2} u_2^2(t) \right) dt.$$





## DAFTAR LAMPIRAN

<b>Lampiran 1</b>	<i>Listing</i> program Runge-Kutta Orde Empat.....	97
<b>Lampiran 2</b>	<i>Listing</i> program Sweep Maju-Mundur .....	99
<b>Lampiran 3</b>	Estimasi pada model II .....	104
<b>Lampiran 4</b>	Estimasi pada model III .....	107



## LAMPIRAN

### Lampiran 1 Listing program Runge-Kutta Orde Empat

RK4.m	
1	<code>function [t,z] = RK4(SEIT,a,b,za,M)</code>
2	<code>h = (b-a)/M;</code>
3	<code>t = a:h:b;</code>
4	<code>z = zeros(M+1,length(za));</code>
5	<code>z(1,:) = za;</code>
6	<code>for i = 1:M</code>
7	<code>    k1 = h*feval(SEIT,t(i),z(i,:));</code>
8	<code>    k2 = h*feval(SEIT,t(i)+h/2,z(i,:)+k1/2);</code>
9	<code>    k3 = h*feval(SEIT,t(i)+h/2,z(i,:)+k2/2);</code>
10	<code>    k4 = h*feval(SEIT,t(i)+h,z(i,:)+k3);</code>
11	<code>    z(i+1,:) = z(i,:)+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;</code>
12	<code>end;</code>
SEIT.m	
1	<code>function dy=SEIT(t,y);</code>
2	<code>%Nilai parameter :</code>
3	<code>A = 20;</code>
4	<code>d = 0.0455;</code>
5	<code>beta = 0.004;</code>
6	<code>gamma = 0.07;</code>
7	<code>mu = 0.75;</code>
8	<code>alpha = 0.2;</code>
9	<code>epsilon = 0.23;</code>
10	<code>delta = 0.1;</code>
11	<code>p = 0.3;</code>
12	<code>m = d+epsilon;</code>
13	<code>n = d+gamma+delta;</code>
14	<code>%Sistem model I</code>
15	<code>dy(1) = mu*((beta*y(2))/(1+alpha*y(2)))*(y(4)-y(1)-y(2)-...</code>
16	<code>    y(3))-(d+epsilon)*y(1);</code>
17	<code>dy(2) = (1-mu)*((beta*y(2))/(1+alpha*y(2)))*(y(4)-y(1)-...</code>
18	<code>    y(2)-y(3))+epsilon*y(1)-(d+gamma+delta)*y(2);</code>
19	<code>dy(3) = -(p+d)*y(3);</code>
20	<code>dy(4) = A-d*y(4)-delta*y(2);</code>
21	<code>dy(5) = dy(4)-dy(1)-dy(2)-dy(3);</code>
22	
SIMULASI_I.m	
1	<code>%%Program Utama</code>
2	
3	<code>%Populasi awal</code>
4	<code>So = 400;</code>
5	<code>Eo = 15;</code>
6	<code>Io = 20;</code>
7	<code>To = 0;</code>
8	<code>No = So+Eo+Io+To;</code>
9	<code>[t y] = RK4('SEIT',0,200,[Eo Io To No So],800);</code>
10	



```

11 %Nilai parameter
12 A = 20;
13 d = 0.0455;
14 beta = 0.0005;
15 gamma = 0.07;
16 mu = 0.75;
17 alpha = 0.2;
18 epsilon = 0.23;
19 delta = 0.1;
20 p = 0.3;
21 m = d+epsilon;
22 n = d+gamma+delta;
23 R0 = beta*A*(m*(1-mu)+mu*epsilon)/(m*n*d)
24
25 %Titik kesetimbangan endemi
26 I = ((m*n/(m*(1-mu)+mu*epsilon))*((beta*A*(m*(1-mu)+...
27 mu*epsilon)/(m*n*d))-1))/(beta*(delta/d+(mu*n/...
28 (m*(1-mu)+mu*epsilon))+1)+(alpha*m*n/(m*(1-mu)+...
29 mu*epsilon)))
30 E = (mu*n/(m*(1-mu)+mu*epsilon))*I
31 T = 0
32 N = A/d-(delta/d)*I
33 S = N-I-E-T
34
35 %Potret fase
36 figure(1);
37 plot(t,y,'LineWidth',2);
38 hold on;
39 title('MODEL I');
40 xlabel('Waktu (Hari)');
41 ylabel('Jumlah Individu');
42 axis square
43 grid on
44 legend('E = Exposed','I = Infective','T = Treatment',...
45 'N = Total population','S = Susceptible');
46
47 %Grafik perubahan populasi
48 figure(2);
49 plot3(y(:,1),y(:,2),y(:,5),'LineWidth',2);
50 hold on
51 plot3(y(1,1),y(1,2),y(1,5),'*g','LineWidth',5);
52 plot3(0,0,A/d,'*magenta','LineWidth',5); % Plot titik P0
53 plot3(E,I,S,'*r','LineWidth',5); % Plot titik P*
54 hold on
55 hold on
56 xlabel('Exposed');
57 ylabel('Infective');
58 zlabel('Susceptible');
59 legend('Potret fase','Nilai awal',...
60 'Titik bebas penyakit P^0','Titik endemi P^*');
61 grid on

```



## Lampiran 2 Listing program Sweep Maju-Mundur

RKDiff.m	
1	<code>function dy = RKDiff(y,u,A,d,delta,p,gamma,mu,alpha,...</code>
2	<code>beta,epsilon)</code>
3	
4	<code>x(1)= (mu*beta*y(2)/(1+alpha*y(2)))*(y(4)-y(1)-y(2)-y(3))...</code>
5	<code>-(d+epsilon)*y(1);</code>
6	<code>x(2)= ((1-mu)*beta*y(2)/(1+alpha*y(2)))*(y(4)-y(1)-y(2)-...</code>
7	<code>y(3))+epsilon*y(1)-(d+gamma+delta+u)*y(2);</code>
8	<code>x(3)= u*y(2)-(p+d)*y(3);</code>
9	<code>x(4)= A-d*y(4)-delta*y(2);</code>
10	<code>dy = [x(1) x(2) x(3) x(4)];</code>
RKp.m	
1	<code>function dp = RKp(y,I,u,d,delta,p,gamma,mu,alpha,beta,...</code>
2	<code>epsilon)</code>
3	
4	<code>p1 = y(1);</code>
5	<code>p2 = y(2);</code>
6	<code>p3 = y(3);</code>
7	<code>p4 = y(4);</code>
8	
9	<code>x(1)=(p1*mu+p2*(1-mu))*beta*I/(1+alpha*I)+(p1-p2)*...</code>
10	<code>epsilon+p1*d;</code>
11	<code>x(2)= p2*(d+gamma)+(p2-p3)*u+(p2+p4)*delta-1-(p1*mu+p2*...</code>
12	<code>(1-mu))*beta*(N-E-T-2*I-alpha*I^2)/((1+alpha*I)^2);</code>
13	<code>x(3)=(p1*mu+p2*(1-mu))*beta*I/(1+alpha*I)+p3*(p+d);</code>
14	<code>x(4)= p4*d-(p1*mu+p2*(1-mu))*beta*I/(1+alpha*I);</code>
15	<code>dp = [x(1) x(2) x(3) x(4)];</code>
SIMULASI_II.m	
1	<code>clear all;</code>
2	<code>clc;</code>
3	<code>%Populasi awal</code>
4	<code>S0 = 400;</code>
5	<code>E0 = 15;</code>
6	<code>I0 = 20;</code>
7	<code>T0 = 0;</code>
8	<code>N0 = S0+E0+I0+T0;</code>
9	
10	<code>%Nilai parameter</code>
11	<code>A = 20;</code>
12	<code>d = 0.0455;</code>
13	<code>beta = 0.002;</code>
14	<code>gamma = 0.07;</code>
15	<code>mu = 0.75;</code>
16	<code>alpha = 0.2;</code>
17	<code>epsilon = 0.23;</code>
18	<code>delta = 0.1;</code>
19	<code>p = 0.3;</code>
20	<code>C = 1;</code>
21	<code>umax = 0.9;</code>
22	<code>m = d+epsilon;</code>
23	<code>n = d+gamma+delta;</code>



```

24
25 a = 0;
26 b = 200;
27 M = 800;
28 h = (b-a)/M
29 t = a:h:b;
30 L = length(t);
31
32 %Langkah 1
33 u = zeros(L,1);
34 uold = zeros(L,1);
35 E = zeros(L,1);
36 I = zeros(L,1);
37 T = zeros(L,1);
38 N = zeros(L,1);
39 Eold = zeros(L,1);
40 Iold = zeros(L,1);
41 Told = zeros(L,1);
42 Nold = zeros(L,1);
43 p1 = zeros(L,1);
44 p2 = zeros(L,1);
45 p3 = zeros(L,1);
46 p4 = zeros(L,1);
47 p1o = zeros(L,1);
48 p2o = zeros(L,1);
49 p3o = zeros(L,1);
50 p4o = zeros(L,1);
51 tes = 1;
52 it = 0;
53
54 while tes > 1e-3
55     %Langkah 2
56     uold = u;
57     Eold = E;
58     Iold = I;
59     Told = T;
60     Nold = N;
61     p1o = p1;
62     p2o = p2;
63     p3o = p3;
64     p4o = p4;
65
66     %Langkah 3
67     E(1) = E0;
68     I(1) = I0;
69     T(1) = T0;
70     N(1) = N0;
71     J(it+1) = 0;
72
73     %Langkah 4
74     for i = 1:L-1
75         J(it+1) = J(it+1)+h*(I(i) + 1/2*C*uold(i)^2);
76
77         y = [E(i) I(i) T(i) N(i)];
78         k1 = h*RKDiff(y,uold(i),A,d,delta,p,gamma,mu,...
79             alpha,beta,epsilon);
80         k2 = h*RKDiff(y+0.5*k1,uold(i),A,d,delta,p,...

```



```

81         gamma,mu,alpha,beta,epsilon);
82     k3 = h*RKDiff(y+0.5*k2,uold(i),A,d,delta,p,...
83         gamma,mu,alpha,beta,epsilon);
84     k4 = h*RKDiff(y+k3,uold(i),A,d,delta,p,gamma,...
85         mu,alpha,beta,epsilon);
86     y = y + (1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);
87
88     E(i+1) = y(1);
89     I(i+1) = y(2);
90     T(i+1) = y(3);
91     N(i+1) = y(4);
92 end
93 J(it+1) = J(it+1)+h*(I(L) + 1/2*C*uold(L)^2);
94
95 %Plot populasi tanpa kontrol
96 if it == 0
97     figure(1)
98     plot(t,E,'b-','LineWidth',3);
99     hold on;
100
101     figure(2)
102     plot(t,I,'b-','LineWidth',3);
103     hold on;
104
105     figure(3)
106     plot(t,T,'b-','LineWidth',3);
107     hold on;
108
109     figure(4)
110     plot(t,N,'b-','LineWidth',3);
111     hold on;
112
113     figure(5)
114     plot(t,N-(E+I+T),'b-','LineWidth',3);
115     hold on;
116 end
117
118 p1(L) = 0;
119 p2(L) = 0;
120 p3(L) = 0;
121 p4(L) = 0;
122 u(L) = 0;
123
124 %Langkah 5
125 temp2 = min([(p2(L) - p3(L))*I(L)/C umax]);
126 u(L) = max([temp2 0]);
127
128 %Langkah 6
129 for i = 1:L-1
130     j = L-i;
131
132     y = [p1(j+1) p2(j+1) p3(j+1) p4(j+1)];
133     k1 = h*RKp(y,I(j+1),uold(j+1),d,delta,p,...
134         gamma,mu,alpha,beta,epsilon);
135     k2 = h*RKp(y+0.5*k1,I(j+1),uold(j+1),d,...
136         delta,p,gamma,mu,alpha,beta,epsilon);
137     k3 = h*RKp(y+0.5*k2,I(j+1),uold(j+1),d,...

```



```

138         delta,p,gamma,mu,alpha,beta,epsilon);
139         k4 = h*RKp(y+k3,I(j+1),uold(j+1),d,delta,...
140             p,gamma,mu,alpha,beta,epsilon);
141         y = y - (1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);
142
143         p1(j) = y(1);
144         p2(j) = y(2);
145         p3(j) = y(3);
146         p4(j) = y(4);
147
148         temp2 = min([(p2(j) - p3(j))*I(j)/C umax]);
149         u(j) = max([temp2 0]);
150     end;
151
152     %Langkah 7
153     eE = sum(abs(E-Eold));
154     eI = sum(abs(I-Iold));
155     eT = sum(abs(T-Told));
156     eN = sum(abs(N-Nold));
157     ep1 = sum(abs(p1-p1o));
158     ep2 = sum(abs(p2-p2o));
159     ep3 = sum(abs(p3-p3o));
160     ep4 = sum(abs(p4-p4o));
161     eu = sum(abs(u-uold));
162     tes = eE+eI+eT+eN+ep1+ep2+ep3+ep4+eu;
163     it = it+1;
164
165     u = (0.5*u+0.5*uold);
166 end
167
168 %Langkah 8
169 %Plot populasi dengan kontrol
170 figure(1)
171 plot(t,E,'r-','LineWidth',3);
172 xlabel('Waktu (Hari)');
173 ylabel('E(t)');
174 grid on;
175 legend('E Tanpa Kontrol','E dengan Kontrol u_1',...
176     'E dengan Kontrol u_2');
177 title('Populasi Exposed');
178 hold on;
179
180 figure(2)
181 plot(t,I,'r-','LineWidth',3);
182 xlabel('Waktu (Hari)');
183 ylabel('I(t)');
184 grid on;
185 legend('I Tanpa Kontrol','I dengan Kontrol u_1',...
186     'I dengan Kontrol u_2');
187 title('Populasi Infective');
188 hold on;
189
190 figure(3)
191 plot(t,T,'r-','LineWidth',3);
192 xlabel('Waktu (Hari)');
193 ylabel('T(t)');
194 grid on;

```



```

195 legend('T Tanpa Kontrol','T dengan Kontrol u_1',...
196         'T dengan Kontrol u_2');
197 title('Populasi Treatment');
198 hold on;
199
200 figure(4)
201 plot(t,N,'r-','LineWidth',3);
202 xlabel('Waktu (Hari)');
203 ylabel('N(t)');
204 grid on;
205 legend('N Tanpa Kontrol','N dengan Kontrol u_1',...
206         'N dengan Kontrol u_2');
207 title('Total Populasi');
208 hold on;
209
210 figure(5)
211 plot(t,N-(E+I+T),'r-','LineWidth',3);
212 xlabel('Waktu (Hari)');
213 ylabel('S(t)');
214 grid on;
215 legend('S Tanpa Kontrol','S dengan Kontrol u_1',...
216         'S dengan Kontrol u_2');
217 title('Populasi Susceptible');
218 hold on;
219
220 figure(6)
221 plot(t,u,'r-','LineWidth',3);
222 xlabel('Waktu (Hari)');
223 ylabel('u^(t)');
224 grid on;
225 legend('Kontrol u_1','Kontrol u_2');
226 title('Kontrol Pengobatan');
227 hold on;
228
229 figure(7);
230 plot(1:it,J,'m','LineWidth',3);
231 xlabel('Iterasi');
232 ylabel('J(u)');
233 grid on;
234 legend('Fungsi objektif model II',...
235         'Fungsi objektif model III');
236 title('Fungsi Objektif');
237 hold on;

```



**Lampiran 3** Estimasi pada model II

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2}(v - \bar{v})^2(t_f) + \lambda \int_0^{t_f} (v - \bar{v})^2 dt \\
 &= \int_0^{t_f} \left( \left( \mu \frac{\beta e^{\lambda t} q}{1 + \alpha e^{\lambda t} q} (s + v + q + r) - \mu \frac{\beta e^{\lambda t} \bar{q}}{1 + \alpha e^{\lambda t} \bar{q}} (\bar{s} + \bar{v} + \bar{q} + \bar{r}) \right) (v \right. \\
 & \quad \left. - \bar{v}) + ((d + \varepsilon)v - (d + \varepsilon)\bar{v})(v - \bar{v}) \right) dt \\
 &\leq C_1 e^{\lambda t} \int_0^{t_f} ((s - \bar{s})^2 + (v - \bar{v})^2 + (q - \bar{q})^2 + (r - \bar{r})^2) dt \\
 & \quad + C_2 \int_0^{t_f} (v - \bar{v})^2 dt. \\
 & \frac{1}{2}(q - \bar{q})^2(t_f) + \lambda \int_0^{t_f} (q - \bar{q})^2 dt \\
 &= \int_0^{t_f} \left( \left( (1 - \mu) \frac{\beta e^{\lambda t} q}{1 + \alpha e^{\lambda t} q} (s + v + q + r) - (1 - \mu) \frac{\beta e^{\lambda t} \bar{q}}{1 + \alpha e^{\lambda t} \bar{q}} (\bar{s} + \bar{v} + \bar{q} + \bar{r}) \right) (q - \bar{q}) \right. \\
 & \quad \left. + ((d + \gamma + \delta + u_1)q - (d + \gamma + \delta + \bar{u}_1)\bar{q})(q - \bar{q}) \right) dt \\
 &\leq C_1 e^{\lambda t} \int_0^{t_f} ((s - \bar{s})^2 + (v - \bar{v})^2 + (q - \bar{q})^2 + (r - \bar{r})^2) dt \\
 & \quad + C_2 \int_0^{t_f} ((v - \bar{v})^2 + (q - \bar{q})^2 + (x - \bar{x})^2) dt \\
 & \frac{1}{2}(r - \bar{r})^2(t_f) + \lambda \int_0^{t_f} (r - \bar{r})^2 dt \\
 &= \int_0^{t_f} ((u_1 q - \bar{u}_1 \bar{q})(r - \bar{r}) + ((p + d)r - (p + d)\bar{r})(r - \bar{r})) dt \\
 &\leq C_1 \int_0^{t_f} ((x - \bar{x})^2 + (q - \bar{q})^2 + (r - \bar{r})^2) dt
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}(s - \bar{s})^2(t_f) + \lambda \int_0^{t_f} (s - \bar{s})^2 dt = \int_0^{t_f} ((ds - d\bar{s})(s - \bar{s}) + (\delta q - \delta \bar{q})(s - \bar{s})) dt \\
& \leq C_2 \int_0^{t_f} (q - \bar{q})^2 + (s - \bar{s})^2 dt \\
& \frac{1}{2}(w - \bar{w})^2(0) + \lambda \int_0^{t_f} (w - \bar{w})^2 dt \\
& = \int_0^{t_f} \left( \left( (w\mu + x(1 - \mu)) \frac{\beta e^{\lambda t} q}{1 + \alpha e^{\lambda t} q} - (\bar{w}\mu + \bar{x}(1 - \mu)) \frac{\beta e^{\lambda t} \bar{q}}{1 + \alpha e^{\lambda t} \bar{q}} \right) (w \right. \\
& \quad \left. - \bar{w}) + ((w - x)\varepsilon - (\bar{w} - \bar{x})\varepsilon)(w - \bar{w}) + (wd - \bar{w}d)(w - \bar{w}) \right) dt \\
& \leq C_1 e^{\lambda t} \int_0^{t_f} ((q - \bar{q})^2 + (w - \bar{w})^2 + (x - \bar{x})^2) dt \\
& \quad + C_2 \int_0^{t_f} ((w - \bar{w})^2 + (x - \bar{x})^2) dt \\
& \frac{1}{2}(x - \bar{x})^2(0) + \lambda \int_0^{t_f} (x - \bar{x})^2 dt \\
& = \int_0^{t_f} \left( \left( (w\mu + x(1 - \mu)) \frac{\beta e^{\lambda t} (s - v - r - 2q - \alpha e^{\lambda t} q^2)}{(1 + \alpha e^{\lambda t} q)^2} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (\bar{w}\mu + \bar{x}(1 - \mu)) \frac{\beta e^{\lambda t} (\bar{s} - \bar{v} - \bar{r} - 2\bar{q} - \alpha e^{\lambda t} \bar{q}^2)}{(1 + \alpha e^{\lambda t} \bar{q})^2} \right) (x - \bar{x}) \right. \\
& \quad \left. + ((d + \gamma)x - (d + \gamma)\bar{x})(x - \bar{x}) + ((x - y)u_1 - (\bar{x} - \bar{y})\bar{u}_1)(x - \bar{x}) \right. \\
& \quad \left. + ((x + z)\delta - (\bar{x} + \bar{z})\bar{\delta})(x - \bar{x}) \right) dt \\
& \leq C_1 e^{\lambda t} \int_0^{t_f} ((q - \bar{q})^2 + (s - \bar{s})^2 + (r - \bar{r})^2 + (v - \bar{v})^2 + (w - \bar{w})^2 \\
& \quad + (x - \bar{x})^2) dt + C_2 \int_0^{t_f} ((x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 + (z - \bar{z})^2) dt
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}(y - \bar{y})^2(0) + \lambda \int_0^{t_f} (y - \bar{y})^2 dt \\
&= \int_0^{t_f} \left( \left( (w\mu + x(1 - \mu)) \frac{\beta e^{\lambda t} q}{1 + \alpha e^{\lambda t} q} - (\bar{w}\mu + \bar{x}(1 - \mu)) \frac{\beta e^{\lambda t} \bar{q}}{1 + \alpha e^{\lambda t} \bar{q}} \right) (y \right. \\
&\quad \left. - \bar{y}) + (y(p + d) - \bar{y}(p + d))(y - \bar{y}) \right) dt \\
&\leq C_1 e^{\lambda t} \int_0^{t_f} ((q - \bar{q})^2 + (w - \bar{w})^2 + (x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2) dt \\
&\quad + C_2 \int_0^{t_f} (y - \bar{y})^2 dt \\
&\frac{1}{2}(z - \bar{z})^2(0) + \lambda \int_0^{t_f} (z - \bar{z})^2 dt \\
&= \int_0^{t_f} \left( \left( (w\mu + x(1 - \mu)) \frac{\beta e^{\lambda t} q}{1 + \alpha e^{\lambda t} q} - (\bar{w}\mu + \bar{x}(1 - \mu)) \frac{\beta e^{\lambda t} \bar{q}}{1 + \alpha e^{\lambda t} \bar{q}} \right) (z \right. \\
&\quad \left. - \bar{z}) + (dz - d\bar{z})(z - \bar{z}) \right) dt \\
&\leq C_1 e^{\lambda t} \int_0^{t_f} ((q - \bar{q})^2 + (w - \bar{w})^2 + (x - \bar{x})^2 + (z - \bar{z})^2) dt \\
&\quad + C_2 \int_0^{t_f} (z - \bar{z})^2 dt
\end{aligned}$$



#### Lampiran 4 Estimasi pada model III

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}(v - \bar{v})^2(t_f) + \lambda \int_0^{t_f} (v - \bar{v})^2 dt \\
&= \int_0^{t_f} \left( \left( \mu \frac{\beta e^{\lambda t} q}{1 + \alpha e^{\lambda t} q} (s + v + q + r) - \mu \frac{\beta e^{\lambda t} \bar{q}}{1 + \alpha e^{\lambda t} \bar{q}} (\bar{s} + \bar{v} + \bar{q} + \bar{r}) \right) (v \right. \\
&\quad \left. - \bar{v}) + ((d + \varepsilon + u_2)v - (d + \varepsilon + \bar{u}_2)\bar{v})(v - \bar{v}) \right) dt \\
&\leq C_1 e^{\lambda t} \int_0^{t_f} ((s - \bar{s})^2 + (v - \bar{v})^2 + (q - \bar{q})^2 + (r - \bar{r})^2) dt \\
&\quad + C_2 \int_0^{t_f} ((w - \bar{w})^2 + (v - \bar{v})^2) dt \\
& \frac{1}{2}(q - \bar{q})^2(t_f) + \lambda \int_0^{t_f} (q - \bar{q})^2 dt \\
&= \int_0^{t_f} \left( \left( (1 - \mu) \frac{\beta e^{\lambda t} q}{1 + \alpha e^{\lambda t} q} (s + v + q + r) - (1 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \mu) \frac{\beta e^{\lambda t} \bar{q}}{1 + \alpha e^{\lambda t} \bar{q}} (\bar{s} + \bar{v} + \bar{q} + \bar{r}) \right) (q - \bar{q}) + (\varepsilon v - \varepsilon \bar{v})(q - \bar{q}) \right. \\
&\quad \left. + ((d + \gamma + \delta)q - (d + \gamma + \delta)\bar{q})(q - \bar{q}) \right) dt \\
&\leq C_1 e^{\lambda t} \int_0^{t_f} ((s - \bar{s})^2 + (v - \bar{v})^2 + (q - \bar{q})^2 + (r - \bar{r})^2) dt \\
&\quad + C_2 \int_0^{t_f} ((q - \bar{q})^2 + (v - \bar{v})^2) dt \\
& \frac{1}{2}(r - \bar{r})^2(t_f) + \lambda \int_0^{t_f} (r - \bar{r})^2 dt \\
&= \int_0^{t_f} \left( (u_2 v - \bar{u}_2 \bar{v})(r - \bar{r}) + ((p + d)r - (p + d)\bar{r})(r - \bar{r}) \right) dt \\
&\leq C_1 \int_0^{t_f} ((v - \bar{v})^2 + (w - \bar{w})^2 + (r - \bar{r})^2) dt
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}(s - \bar{s})^2(t_f) + \lambda \int_0^{t_f} (s - \bar{s})^2 dt = \int_0^{t_f} ((ds - d\bar{s})(s - \bar{s}) + (\delta q - \delta \bar{q})(s - \bar{s})) dt \\
& \leq C_2 \int_0^{t_f} (q - \bar{q})^2 + (s - \bar{s})^2 dt \\
& \frac{1}{2}(w - \bar{w})^2(0) + \lambda \int_0^{t_f} (w - \bar{w})^2 dt \\
& = \int_0^{t_f} \left( \left( (w\mu + x(1 - \mu)) \frac{\beta e^{\lambda t} q}{1 + \alpha e^{\lambda t} q} - (\bar{w}\mu + \bar{x}(1 - \mu)) \frac{\beta e^{\lambda t} \bar{q}}{1 + \alpha e^{\lambda t} \bar{q}} \right) (w \right. \\
& \quad \left. - \bar{w}) + ((w - x)\varepsilon - (\bar{w} - \bar{x})\varepsilon)(w - \bar{w}) \right. \\
& \quad \left. + ((w - y)u_2 - (\bar{w} - \bar{y})\bar{u}_2)(w - \bar{w}) + (wd - \bar{w}d)(w - \bar{w}) \right) dt \\
& \leq C_1 e^{\lambda t} \int_0^{t_f} ((q - \bar{q})^2 + (w - \bar{w})^2 + (x - \bar{x})^2) dt \\
& \quad + C_2 \int_0^{t_f} ((w - \bar{w})^2 + (v - \bar{v})^2 + (x - \bar{x})^2) dt \\
& \frac{1}{2}(x - \bar{x})^2(0) + \lambda \int_0^{t_f} (x - \bar{x})^2 dt \\
& = \int_0^{t_f} \left( \left( (w\mu + x(1 - \mu)) \frac{\beta e^{\lambda t} (s - v - r - 2q - \alpha e^{\lambda t} q^2)}{(1 + \alpha e^{\lambda t} q)^2} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (\bar{w}\mu + \bar{x}(1 - \mu)) \frac{\beta e^{\lambda t} (\bar{s} - \bar{v} - \bar{r} - 2\bar{q} - \alpha e^{\lambda t} \bar{q}^2)}{(1 + \alpha e^{\lambda t} \bar{q})^2} \right) (x - \bar{x}) \right. \\
& \quad \left. + ((d + \gamma)x - (d + \gamma)\bar{x})(x - \bar{x}) + ((x + z)\delta - (\bar{x} + \bar{z})\delta)(x - \bar{x}) \right) dt \\
& \leq C_1 e^{\lambda t} \int_0^{t_f} ((q - \bar{q})^2 + (s - \bar{s})^2 + (r - \bar{r})^2 + (v - \bar{v})^2 + (w - \bar{w})^2 \\
& \quad + (x - \bar{x})^2) dt + C_2 \int_0^{t_f} ((x - \bar{x})^2 + (z - \bar{z})^2) dt
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}(y - \bar{y})^2(0) + \lambda \int_0^{t_f} (y - \bar{y})^2 dt \\
&= \int_0^{t_f} \left( \left( (w\mu + x(1 - \mu)) \frac{\beta e^{\lambda t} q}{1 + \alpha e^{\lambda t} q} - (\bar{w}\mu + \bar{x}(1 - \mu)) \frac{\beta e^{\lambda t} \bar{q}}{1 + \alpha e^{\lambda t} \bar{q}} \right) (y \right. \\
&\quad \left. - \bar{y}) + (y(p + d) - \bar{y}(p + d))(y - \bar{y}) \right) dt \\
&\leq C_1 e^{\lambda t} \int_0^{t_f} ((q - \bar{q})^2 + (w - \bar{w})^2 + (x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2) dt \\
&\quad + C_2 \int_0^{t_f} (y - \bar{y})^2 dt \\
& \frac{1}{2}(z - \bar{z})^2(0) + \lambda \int_0^{t_f} (z - \bar{z})^2 dt \\
&= \int_0^{t_f} \left( \left( (w\mu + x(1 - \mu)) \frac{\beta e^{\lambda t} q}{1 + \alpha e^{\lambda t} q} - (\bar{w}\mu + \bar{x}(1 - \mu)) \frac{\beta e^{\lambda t} \bar{q}}{1 + \alpha e^{\lambda t} \bar{q}} \right) (z \right. \\
&\quad \left. - \bar{z}) + (dz - d\bar{z})(z - \bar{z}) \right) dt \\
&\leq C_1 e^{\lambda t} \int_0^{t_f} ((q - \bar{q})^2 + (w - \bar{w})^2 + (x - \bar{x})^2 + (z - \bar{z})^2) dt \\
&\quad + C_2 \int_0^{t_f} (z - \bar{z})^2 dt
\end{aligned}$$







## DAFTAR PUSTAKA

- Berihun, Z. A. (2009). *Nonlinear Incidence and the Dynamic of Infectious Disease Models*. South Africa: African Institute of Mathematical Science.
- Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2009). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems* (Ninth ed.). United State of America: John Willey & Sons, Inc.
- Bryson, A. E., & Ho, Y. C. (1975). *Applied Optimal Control*. New York: Taylor dan Francis Group.
- Capasso, V., & Serio, G. (1978). A Generalization of the Kermack-McKendrick Deterministic Epidemic Model. *Mathematical Biosciences*, 42, 43-61.
- Chen, L., & Sun, J. (2014). Optimal Vaccination and Treatment of An Epidemic Network Model. *Physics Letters A*, 3028-3036.
- Driessche, P. v., & Wetmough, J. (2002). Reproduction Numbers and Sub-Threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission. *Mathematical Biosciences*, 180, 29-48.
- Edwards, C. H., & Penney, D. E. (2008). *Differential Equations and Linear Algebra* (Sixth ed.). New Jersey: Prentice-Hall.
- El hia, M., Balatif, O., Bouyaghroumni, J., Labriji, E., & Rachik, M. (2012). Optimal Control Applied to the Spread of Influenza A(H1N1). *Applied Mathematical Sciences*, 6, 4057-4065.
- Fan, M., Li, M. Y., & Wang, K. (2001). Global Stability of an SEIS Epidemic Model with Recruitment and a Varying Total Population Size. *Mathematical Biosciences*, 170, 199-208.
- Fleming, W. H., & Rishel, R. W. (1975). *Deterministic and Stochastic Optimal Control*. New York: Springer-Verlag.
- Goldman, S. M., & Lightwood, J. (1996). Cost Optimization in the SIS Model of Infectious Disease with Treatment. *Department of Economics, UCB*.
- Hethcote, H. W., & Driessche, P. v. (1991). Some Epidemiological Models with Nonlinear Incidence. *J Math Biol*, 271-87.



- Joshi, H. R. (2002). Optimal Control of an HIV Immunology Model. *Department of Mathematics University of Tennessee*.
- Kermack, W. O., & McKendrick, A. G. (1927). A Contribution of the Mathematical Theory of Epidemics. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Containing Papers of a mathematical and Physical Character*. 115, hal. 700-721. The Royal Society.
- Lenhart, S., & Workman, J. T. (2007). *Numerical Solutions of Optimal Control Problems*. USA: Chapman and Hall, CRC Press.
- Li, G., & Wang, W. (2009). Bifurcation Analysis of an Epidemic Model with Nonlinear Incidence. *Appl. math. Comput.*, 411-423.
- Liu, W. M., Levin, S. A., & Iwasa, Y. (1986). Influence of Nonlinear Incidence Rates Upon the Behavior of SIRS Epidemiological Models. *J. Math. Biol.*, 187-204.
- Nagle, R. K., Saff, E. B., & Snider, A. D. (2012). *Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems* (Sixth ed.). USA: Pearson Education, Inc.
- Naidu, D. S. (2002). *Optimal Control Systems*. New York: CRC Press.
- Quirk, J. P., & Ruppert, R. (1965). Qualitative Economics and The Stability of Equilibrium. *Rev. Econ. Stud.*, 311-326.
- Richard, D. (2002). *Advanced Mathematical Methods with Maple*. United Kingdom: Cambridge University Press.
- Robinson, R. C. (2004). *An Introduction to Dynamical Systems: Continuous and Discrete*. USA: Prentice Hall Education.
- Ruan, S., & Wang, W. (2003). Dynamical Behavior of an Epidemic Model with a Nonlinear Incidence. *J. Differential Equations*, 135-163.
- Tang, Y., Huang, D., Ruan, S., & Zhang, W. (2008). Coexistence of Limit Cycles and Homoclinic Loops in a SIRS Model with a Nonlinear Incidence Rate. *SIAM J. Appl. Math.*, 621-639.
- Wang, J. (2012). Analysis of an SEIS Epidemic Model with a Changing Delitescence. *Abstract and Applied Analysis*, 1-10. doi:10.1155/2012/318150



Wang, W. (2006). Epidemic Models with Nonlinear Infection Forces. *Math. Biosci. Eng.*, 267-279.

Wiggins, S. (1990). *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Berlin: Springer.

Xiao, D., & Ruan, S. (2007). Global Analysis of an Epidemic Model with Nonmonotone Incidence. *Math. Biosci.*, 419-429.

Zhou, J., & Hethcote, H. W. (1994). Population Size Dependent Incidence in Models for Diseases Without Immunity. *Journal of Mathematical Biology*, 809-834.



## BIODATA PENULIS



Penulis yang memiliki nama lengkap M. Ivan Ariful Fathoni lahir di Bojonegoro, 05 Januari 1991. Penulis telah menempuh pendidikan formal mulai dari MIN Kepatihan Bojonegoro, SMP Negeri 1 Bojonegoro, dan SMA Negeri 1 Bojonegoro. Setelah lulus dari SMA, penulis melanjutkan studi S1 di Jurusan Matematika Universitas Brawijaya Malang dan diterima sebagai mahasiswa angkatan 2009. Penulis lulus sarjana dengan tujuh semester dan wisuda pada bulan Juni 2013 dengan mendapat gelar Sarjana Sains. Penulis melanjutkan studi S2 di Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya pada tahun 2013 melalui jalur Beasiswa BPPDN Dikti dengan NRP. 1213 201 009. Selama kuliah S1 dan S2 di Jurusan Matematika, penulis mengambil Bidang Minat Pemodelan dan Simulasi. Untuk membentuk jaringan atau membutuhkan informasi yang berhubungan dengan tesis ini, penulis dapat dihubungi melalui email [m.ivan@fathonisme.com](mailto:m.ivan@fathonisme.com), follow twitter [@fathonisme](https://twitter.com/fathonisme), atau mengunjungi website penulis di [www.fathonisme.com](http://www.fathonisme.com).